

پاسخنامه
ریاضی
الگو دنباله



1 - گزینه «۳»

(مجهوب تارری)

تک تک موارد را بررسی می کنیم:

مورد (الف) نادرست است، زیرا اگر A را مجموعه اعداد طبیعی و B را مجموعه اعداد صحیح منفی در نظر بگیریم با اینکه A و B مجموعه هایی نامتناهی اند اما اشتراک آنها تهی است و مجموعه ای متناهی خواهد بود.

مورد (ب) درست است، چون اگر $A \subseteq B$ باشد و مجموعه کوچکتر نامتناهی باشد آنگاه مجموعه بزرگتر حتماً نامتناهی خواهد بود.

مورد (پ) نادرست است، زیرا $[0, 2] \cap [-1, 1] = [0, 1]$ و هر بازه از اعداد حقیقی همواره نامتناهی است.

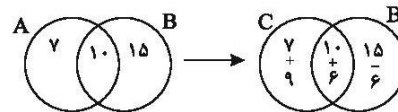
مورد (ت) نادرست است، زیرا با اینکه تعداد درختان موجود در جنگل های آمازون بسیار زیاد است اما می توان آن را با یک عدد حسابی بیان نمود و لذا این مجموعه متناهی است.

(مجموعه، الگو و دنباله) (ریاضی، آ، صفحه های ۵ و ۷)

2 - گزینه «۳»

(موردی برای)

اگر ۱۵ عضو به مجموعه A اضافه کنیم به اشتراک آنها ۶ عضو به $(A - B)$ ، ۹ عضو اضافه می شود و از مجموعه $B - A$ عضو کم می شود. یعنی این ۶ عضو قبلاً در $(B - A)$ بوده و حالا به $A \cap B$ منتقل می شوند. مجموعه جدید A را با C نشان می دهیم.



$$n(C \cup B) = 41$$

(مجموعه، الگو و دنباله) (ریاضی، آ، صفحه های ۱۰ و ۱۳)

3 - گزینه «۱»

(اکبر کلامعلی)

$$1 \text{ مرحله: } (1 \times 1) + 1$$

$$2 \text{ مرحله: } (2 \times 2) + 1$$

$$3 \text{ مرحله: } (3 \times 3) + 1$$

$$\vdots$$

$$n \text{ مرحله: } (n \times (2n - 1)) + 1 \Rightarrow \text{مرحله } 8 = (8 \times 15) + 1 = 121$$

$$\Rightarrow 128 - 121 = 7$$

(مجموعه، الگو و دنباله) (ریاضی، آ، صفحه های ۱۳ و ۲۰)

4 - گزینه «۴»

(پایک سازات)

ضابطه اول در دامنه $5 < n \leq 1$ به صورت نقاطی از یک سهمی است که کمترین مقدار آن ها به ازای طول رأس یعنی $n = 4$ برابر ۱- است و بیشترین مقدار به ازای $n = 1$ برابر با A است. ضابطه دوم یک دنباله خطی با شیب منفی است که بیشترین مقدار آن به ازای $n = 5$ برابر ۱۵ و کمترین مقدار آن به ازای $n = 10$ برابر صفر می شود. دنباله سوم هم که همیشه صفر می شود. بنابراین مجموع کمترین و بیشترین می شود: $15 - 1 = 14$

(مجموعه، الگو و دنباله) (ریاضی، آ، صفحه های ۱۳ و ۲۰)

5 - گزینه «۲»

(سروش مولینی)

راه حل اول:

جمله عمومی را به صورت $a_n = an^2 + bn + c$ در نظر می گیریم:

$$1, 4, 9, \dots$$

$$a + b + c = 1$$

$$4a + 2b + c = 4 \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = 3 \\ 5a + b = 6 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{3}{2}, b = \frac{-3}{2} \Rightarrow c = 1$$

$$9a + 3b + c = 10$$

$$a_{12} - a_{10} = 199 - 136 = 63 \quad \text{پس } a_n = \frac{3n^2 - 3n + 2}{2} \text{ در نتیجه:}$$

راه حل دوم: اختلاف جملات متوالی اعداد ۳ و ۶ هستند پس داریم:

$$a_2 - a_1 = 3$$

$$a_3 - a_2 = 6$$

$$\Rightarrow a_{n+1} - a_n = 3n \Rightarrow \begin{cases} a_{12} - a_{11} = 33 \\ a_{11} - a_{10} = 30 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع}} a_{12} - a_{10} = 63$$

(مجموعه، الگو و دنباله) (ریاضی، آ، صفحه های ۱۳ و ۲۰)

6 - گزینه «۲»

(پوران طهرانیان)

دسته هفتم، هفت جمله را شامل می شود که توان هایی از عدد ۲ هستند. با توجه به دسته بندی داده شده، توان عدد ۲ در جمله آخر هر دسته مجموع اعداد طبیعی

با شروع از ۱ تا شماره آن دسته یعنی $\frac{n(n+1)}{2}$

می باشد، مثلاً توان عدد ۲ در جمله آخر دسته سوم برابر $1 + 2 + 3 = 6$ است

($2^6 = 64$). پس توان عدد ۲ در جمله آخر دسته هفتم برابر

$$1 + 2 + 3 + \dots + 7 = \frac{7(7+1)}{2} = 28$$

دسته هفتم، توان عدد ۲ در جمله آخر دسته ششم را پیدا کرده و یکی به آن

اضافه می کنیم، پس $21 = \frac{6(6+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \dots + 6$ و اگر یکی به آن

اضافه کنیم توان عدد ۲ در جمله اول دسته هفتم برابر ۲۲ خواهد بود. یعنی جمله

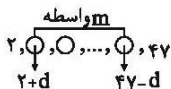
اول دسته هفتم برابر 2^{22} و جمله آخر دسته هفتم برابر 2^{28} است که واسطه

$$\text{حسابی آن ها برابر است با: } \frac{2^{22} + 2^{28}}{2} = 2^{21} + 2^{27}$$

(مجموعه، الگو و دنباله) (ریاضی، آ، صفحه های ۱۳ و ۲۳)

7 - گزینه «۳»

(امیرموشک انصاری)



$$\frac{47 - d}{2 + d} = 6 \Rightarrow 47 - d = 12 + 6d \Rightarrow 35 = 7d \Rightarrow d = 5$$

می دانیم وقتی بین b و a واسطه حسابی درج می کنیم، قدر نسبت دنباله

$$\text{به صورت } d = \frac{b - a}{m + 1} \text{ به دست می آید، بنابراین:}$$

$$d = \frac{47 - 2}{m + 1} = 5 \Rightarrow \frac{45}{m + 1} = 5 \Rightarrow m + 1 = 9 \Rightarrow m = 8$$

(مجموعه، الگو و دنباله) (ریاضی، آ، صفحه های ۲۱ و ۲۳)

8 - گزینه «۴»

(وهاب تارری)

با توجه به اینکه x_1 و x_2 و x_3 و x_4 جملات متوالی دنباله هندسی هستند، روابط زیر برقرار است:

$$\begin{cases} (x_2)^2 = x_1 \cdot x_3 \\ (x_3)^2 = x_2 \cdot x_4 \\ x_1 \cdot x_4 = x_2 \cdot x_3 \end{cases}$$

رابطه را باز می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & (x_1)^2 + (x_2)^2 - 2x_1x_2 + (x_2)^2 + (x_1)^2 \\ & - 2x_1x_2 + (x_1)^2 + (x_2)^2 - 2x_1x_2 = \\ & 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \\ & = 2(x_1^2 + x_2^2) + 2(x_1x_2) + x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \\ & = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 - x_2)^2 = 1 \\ & \Rightarrow |x_1 - x_2| = 1 \end{aligned}$$

(مجموعه، آکو و دنباله) (ریاضی، ا. صفه‌های ۲۵ و ۲۷)

9 - گزینه «ا»

(سوار داوطلب)

با توجه به رابطه $\frac{a_5 - a_1}{(a_2)^2 - (a_1)^2} = \frac{f}{9}$ داریم:

$$\begin{aligned} \frac{a_1 r^5 - a_1}{(a_1 r^2)^2 - a_1^2} &= \frac{f}{9} \Rightarrow \frac{a_1(r^5 - 1)}{a_1^2(r^2 - 1)} = \frac{f}{9} \Rightarrow \frac{1}{a_1} = \frac{f}{9} \Rightarrow a_1 = \frac{9}{f} \\ r &= \frac{a_2}{a_1} = \frac{f}{9} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} \Rightarrow a_n = r \Rightarrow a_1 r^{n-1} = r \Rightarrow a_1 r^{n-2} = 1 \Rightarrow \\ \frac{9}{f} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} &= 1 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = \frac{f}{9} \Rightarrow n-2 = 2 \Rightarrow n = 4 \end{aligned}$$

(مجموعه، آکو و دنباله) (ریاضی، ا. صفه‌های ۲۵ و ۲۷)

10 - گزینه «ف»

(علی‌اصغر شریفی)

جملات اول تا چهارم دنباله را به ترتیب با x, y, z و t نمایش می‌دهیم. اگر قدر نسبت دنباله حسابی را با d و قدر نسبت دنباله هندسی را با q نشان دهیم، داریم:

$$x = y - d, z = y + d$$

$$z = yq, t = yq^2$$

با برابر گذاشتن مقادیر z داریم:

$$y + d = yq \Rightarrow d = yq - y \Rightarrow x = y - d = 2y - yq$$

حال که تمام جملات برحسب y و q به‌دست آمده‌اند، به سراغ مجموع جملات گفته شده در صورت سؤال می‌رویم:

$$\begin{cases} x + t = 2 \Rightarrow y(r - q + q^2) = 2 \Rightarrow \frac{2 - q + q^2}{1 + q} = 2 \\ y + z = 1 \Rightarrow y(1 + q) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2 - q + q^2 = 2q + 2 \Rightarrow q^2 - 3q = 0 \Rightarrow q \neq 0 \Rightarrow q = 3$$

با به‌دست آمدن q ، بقیه مجهول‌ها هم به‌دست می‌آیند:

$$y = \frac{1}{q+1} = \frac{1}{4}$$

$$d = yq - y = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

در نتیجه: $\frac{q}{d} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$ (مجموعه، آکو و دنباله) (ریاضی، ا. صفه‌های ۲۱ و ۲۷)

11 - گزینه «ب»

(پوران علاج)

با مشخص کردن اعضای هر مجموعه داریم:

$$A = \{\dots, -11, -10, -9, \dots\} \rightarrow \text{نامتناهی}$$

$$B = \{\dots, -18, -17\} \rightarrow \text{نامتناهی}$$

$$C = \{-18, -24, -36, -72\} \rightarrow \text{متناهی}$$

$$D = \emptyset \rightarrow \text{متناهی}$$

(مجموعه، آکو و دنباله) (ریاضی، ا. صفه‌های ۲ تا ۷)

12 - گزینه «ب»

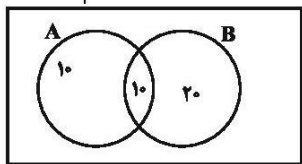
(پوران علاج)

در صورتی که مجموعه A را مجموعه کسانی که خودشان قبلاً مبتلا شده‌اند و مجموعه B را مجموعه کسانی که اقوامشان مبتلا شده‌اند در نظر بگیریم، داریم:

$$\text{فرض: } n(A \cap B) = x$$

$$n(A) = x + 10 \Rightarrow n(B) = \frac{3}{4}(x + 10)$$

$$n(U) = \frac{3}{4}(x + 10) + 10 + 5 = 45 \Rightarrow x = 10$$



$$B \text{ یا } A \text{ حداقل: } n(A \cap B) = 45 - 10 = 35$$

(مجموعه، آکو و دنباله) (ریاضی، ا. صفه‌های ۸ و ۱۳)

13 - گزینه «ف»

(مادر نصیری)

با توجه به تشکیل چندجمله ابتدایی دنباله داریم:

$$n = 1 \Rightarrow a_1 = -a_1 + (-1)^1 = -3 - 1 = -4 \Rightarrow a_1 = -4$$

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = -a_2 + (-1)^2 = -(-4) + 1 = 5 \Rightarrow a_2 = 5$$

$$n = 3 \Rightarrow a_3 = -a_3 + (-1)^3 = -5 - 1 = -6 \Rightarrow a_3 = -6$$

:

اعداد دنباله را می‌نویسیم و با توجه به نظم موجود، مجموع ۱۰۱ جمله اول را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_{101} &= (3 + (-4)) + (5 + (-6)) + \dots + (101 + (-102)) + 103 \\ &= \underbrace{(-1) + (-1) + \dots + (-1)}_{50 \text{ تا}} + 103 = 53 \end{aligned}$$

(مجموعه، آکو و دنباله) (ریاضی، ا. صفه‌های ۱۳ و ۲۰)

14 - گزینه «ف»

(سوار داوطلب)

a و 10 ، سه جمله متوالی دنباله حسابی‌اند:

$$\frac{a+b}{2} = 10 \Rightarrow a+b = 20 \Rightarrow b = 20-a$$

a و 9 و $b+10$ ، سه جمله متوالی دنباله هندسی‌اند:

$$9^2 = a(b+10) \Rightarrow 81 = a(20-a+10) \Rightarrow -a^2 + 30a = 81$$

$$\Rightarrow a^2 - 30a + 81 = 0$$

$$(a-27)(a-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=3 \Rightarrow b=17 & \text{غیرقابل قبول} \\ a=27 \Rightarrow b=-7 & \text{قابل قبول} \end{cases}$$

$$\text{دنباله حسابی: } 27, 10, -7 \Rightarrow d = 10 - 27 = -17$$

$$\text{دنباله هندسی: } 27, 9, 3 \Rightarrow q = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

$$q-d = \frac{1}{3} - 17 = -\frac{52}{3}$$

(مجموعه، آکو و دنباله) (ریاضی، ا. صفه‌های ۲۱ و ۲۷)

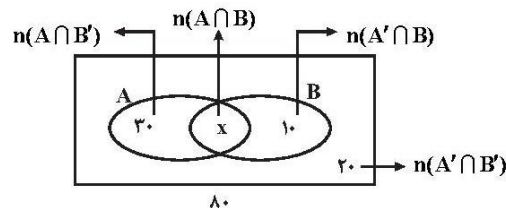
15 - گزینه «۲»

(یاسین سپهر)

روش اول: استفاده از روابط:

$$\begin{aligned} n(A' \cap B') &= (n(A \cup B))' = n(U) - n(A \cup B) = 20 \\ \Rightarrow 20 - n(A \cup B) &= 6 \\ \Rightarrow n(A \cup B) &= 14 \\ n(A \cap B') &= n(A) - n(A \cap B) = 3 \\ n(A' \cap B) &= n(B) - n(A \cap B) = 1 \\ \Rightarrow n(A) + n(B) - n(A \cap B) - n(A \cap B) &= 4 \\ \frac{n(A \cup B)}{n(A \cap B)} &= 4 \\ \Rightarrow 14 - n(A \cap B) &= 4 \Rightarrow n(A \cap B) = 10 \end{aligned}$$

روش دوم: استفاده از نمودار ون:



$$3 + x + 1 + 20 = 20 \Rightarrow x = 2$$

(مجموعه، آکو و دنباله) (ریاضی، صفحه‌های ۱۳ تا ۱۴)

16 - گزینه «۱»

(نیمه‌گیران)

با دقت به الگوی شکلی داده شده، در جمله عمومی این الگوی شکلی جمله n^2 وجود دارد. همچنین ۳ دایره نیز به صورت ثابت در اطراف شکل‌ها در هر مرحله دیده می‌شود پس یکی دیگر از جمله‌های این الگو عدد ۳ می‌باشد و علاوه بر این موارد در هر الگو به تعداد شماره‌های آن، دایره وجود دارد پس جمله دیگر دنباله نیز n می‌باشد:

$$t_n = n^2 + n + 3 \rightarrow \begin{cases} (1) : 1 + 1 + 3 = 5 \\ (2) : 4 + 2 + 3 = 9 \\ (3) : 9 + 3 + 3 = 15 \end{cases}$$

تعداد دایره‌ها در الگوی شکل هشتم و الگوی شکل چهارم را با توجه به جمله عمومی محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} t_4 = 4^2 + 4 + 3 = 23 \\ t_8 = 8^2 + 8 + 3 = 75 \end{cases} \Rightarrow t_8 - t_4 = 75 - 23 = 52$$

(مجموعه، آکو و دنباله) (ریاضی، صفحه‌های ۱۳ تا ۲۰)

17 - گزینه «۲»

(سویل حسن‌خان‌پور)

ابتدا صورت و مخرج دنباله را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم تا گویا شود.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+1}} \times \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}} \\ &= \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}}{(n+3) - (n+1)} = \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}}{2} \\ A &= a_1 + a_2 + \dots + a_{24} \\ &= \frac{\sqrt{4} - \sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{4} + \sqrt{6} - \sqrt{5} + \dots + \sqrt{25} - \sqrt{24} + \sqrt{27} - \sqrt{26}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{27} - \sqrt{2}}{2} \Rightarrow A = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= a_2 + a_4 + \dots + a_{24} \\ &= \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{7} - \sqrt{5} + \dots + \sqrt{25} - \sqrt{23} + \sqrt{27} - \sqrt{25}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{27} - \sqrt{3}}{2} \\ \Rightarrow B &= \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \\ \Rightarrow \frac{A}{B} &= \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

(مجموعه، آکو و دنباله) (ریاضی، صفحه‌های ۱۳ تا ۲۰)

18 - گزینه «۲»

(ویر وون‌آباری)

در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$\begin{aligned} (x+d)^2 &= x^2 + (x-d)^2 \rightarrow x^2 + 2xd + d^2 = x^2 + x^2 - 2xd + d^2 \\ \Rightarrow x^2 - 4xd &= 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ غق} \\ x = 4d \Rightarrow \text{اضلاع: } 3d, 4d, 5d \end{cases} \end{aligned}$$

$$S = \frac{rd \times rd}{2} = 24 \Rightarrow d = 2 \Rightarrow \text{اضلاع} = 6, 8, 10$$

$$\Rightarrow 24 = \frac{1}{2} \times 10 \times h \Rightarrow h = \frac{24}{5} = 4.8$$

(مجموعه، آکو و دنباله) (ریاضی، صفحه‌های ۲۱ تا ۲۳)

19 - گزینه «۳»

(تایک سارات)

دسته‌بندی به شکل روبه‌روست: $\{2\}, \{4, 6\}, \{8, 10, 12\}, \{14, 16, 18, 20\}, \dots$
دسته اول یک عدد، دوم دو عدد، سوم سه عدد و به همین ترتیب دسته نهم نه عدد.
پس باید ببینیم آخرین جمله دسته پانزدهم چندمین عدد طبیعی زوج است.

$$1 + 2 + 3 + \dots + 15 = \frac{15}{2}(1 + 15) = 120$$

پس اولین جمله دسته شانزدهم ۱۲۱مین عدد زوج است یعنی ۲۴۲ و این دسته شامل ۱۶ عدد زوج است:

$a_8 = 256 \Rightarrow \{242, 244, 246, 248, 250, 252, 254, 256, \dots\}$ = دسته ۸م
به همین ترتیب باید ببینیم آخرین جمله دسته هفدهم چندمین عدد طبیعی زوج

$$1 + 2 + \dots + 17 = \frac{17}{2}(1 + 17) = 153 \text{ است؟}$$

پس اولین جمله دسته هجدهم ۱۵۴مین عدد طبیعی زوج است یعنی ۳۰۸:

$$\{308, 310, 312, 314, 316, 318, 320, 322, 324, \dots\} \Rightarrow b_9 = 324$$

$$\sqrt{256 \times 324} = 16 \times 18 = 288$$

(مجموعه، آکو و دنباله) (ریاضی، ۱۳ صفحه‌های ۱۳ و ۲۳)

20 - گزینه «۱»

(امسان کریمی)

از الگوی a, m, n, p کمک می‌گیریم که m, n, p سه واسطه درج شده هستند می‌دانیم، b جمله پنجم این دنباله است و با توجه به جمله عمومی دنباله

هندسی $b = aq^4$ ، اختلاف b و a ۴۵ واحد است. یعنی $b - a = 45$ است. با

جایگذاری در $b = aq^4$ خواهیم داشت: $aq^4 - a = 45$ حال باید به دنبال رابطه دیگری میان a و q باشیم، واسطه حسابی بزرگترین و کوچکترین جمله درج‌شده

$\frac{m+p}{2}$ که برابر با ۱۵ شده است، از طرفی $m = aq$ و $p = aq^3$ ، بنابراین

خواهیم داشت:

$$\frac{m+p}{2} = 15 \Rightarrow m+p=30 \Rightarrow aq+aq^3=30$$

دومین رابطه میان a و q پیدا شد و با حل دستگاه شامل این دو مجهول می‌توانیم a و q را بیابیم.

$$\begin{cases} aq^4 - a = 45 \\ aq + aq^3 = 30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a(q^4 - 1) = 45 \\ aq(1 + q^2) = 30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a(q^2 - 1)(q^2 + 1) = 45 \\ aq(1 + q^2) = 30 \end{cases}$$

با تقسیم طرفین دو معادله به‌دست آمده بر یکدیگر به معادله $\frac{q^2 - 1}{q} = \frac{3}{2}$ می‌رسیم

و با طرفین وسطین کردن، معادله درجه دوم را برحسب q تشکیل و حل می‌کنیم:

$$2q^2 - 2 = 3q \rightarrow 2q^2 - 3q - 2 = 0 \rightarrow \Delta = 25$$

$$q_1, q_2 = \frac{+3 \pm \sqrt{25}}{4} \rightarrow q = 2, q = -\frac{1}{2}$$

چون همه جملات مثبت هستند، $q = 2$ پذیرفته است. با جایگذاری q در یکی از معادلات، $a = 3$ به‌دست می‌آید و جملات دنباله را می‌توانیم به‌صورت ۳، ۶، ۱۲، ۲۴، ۴۸ و ۹۶ بنویسیم. خواسته سوال مجموع جملات درج‌شده است که برابر با ۴۲ خواهد بود.

(مجموعه، آکو و دنباله) (ریاضی، ۱۳ صفحه‌های ۲۱ و ۲۷)

21 - گزینه «۲»

روش اول: استفاده از روابط:

$$n(A' \cap B') = (n(A \cup B)) = n(U) - n(A \cup B) = 20$$

$$\Rightarrow 80 - n(A \cup B) = 20$$

$$\Rightarrow n(A \cup B) = 60$$

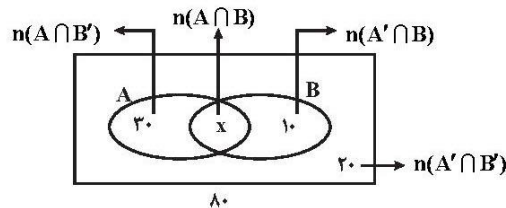
$$n(A \cap B') = n(A) - n(A \cap B) = 30$$

$$n(A' \cap B) = n(B) - n(A \cap B) = 10$$

$$\Rightarrow n(A) + n(B) - n(A \cap B) - n(A \cap B) = 40$$

$$\Rightarrow 60 - n(A \cap B) = 40 \Rightarrow n(A \cap B) = 20$$

روش دوم: استفاده از نمودار ون:



$$30 + x + 10 + 20 = 80 \Rightarrow x = 20$$

(مجموعه، آکو و دنباله) (ریاضی، ۱۳ صفحه‌های ۸ و ۱۳)

22 - گزینه «۲»

(سعید عزیززادانی)

با توجه به دنباله‌ها اولین جمله مشترک ۲۷ است و قدر نسبت دنباله مشترک هم ک.م.م بین قدر نسبت دو دنباله مذکور است.

$$[3, 5] = 15$$

بنابراین دنباله مشترک به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$27, 42, 57, \dots$$

جمله عمومی دنباله مشترک را می‌نویسیم و آن را کمتر از ۱۰۰۰ قرار می‌دهیم و مقدار n را می‌یابیم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \xrightarrow[d=15]{a_1=27} a_n = 27 + (n-1) \times 15$$

$$\Rightarrow a_n = 15n + 12$$

$$a_n < 1000 \Rightarrow 15n + 12 < 1000 \Rightarrow 15n < 988 \Rightarrow n \leq 65$$

چون مقدار n طبیعی است بنابراین بازه اصلی به‌صورت $1 \leq n \leq 65$ است و دنباله ۶۵ جمله کمتر از ۱۰۰۰ دارد.

(مجموعه، آکو و دنباله) (ریاضی، ۱۳ صفحه‌های ۲۱ و ۲۳)

23 - گزینه «۴»

(رمضان پوررمیم)

به هر یک از اعداد ۱، ۳ و ۶ مقدار a را اضافه می‌کنیم:

$$1 + a, 3 + a, 6 + a$$

بین سه جمله متوالی دنباله هندسی داریم:

$$(3+a)^2 = (1+a)(6+a) \Rightarrow 9 + 6a + a^2 = 6 + 7a + a^2$$

$$\Rightarrow a = 3 \Rightarrow 4, 6, 9$$

جملات دنباله هندسی:

$$r = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

بنابراین r برابر است با:

$$\Rightarrow r - a = \frac{3}{2} - 3 = -\frac{3}{2}$$

(مجموعه، آکو و دنباله) (ریاضی، ۱۳ صفحه‌های ۲۵ و ۲۷)

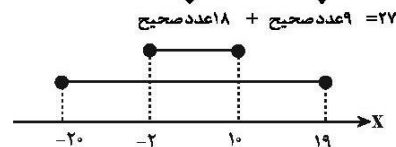
25- گزینه «۲»

(سعی پناهی)

با توجه به مقادیر k داریم:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= [-2, 19] \\ A_2 &= [-4, 18] \\ A_3 &= [-20, 10] \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_3 &= [-2, 10] \\ A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_3 &= [-20, 19] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow [-20, 19] - [-2, 10] = [-20, -2] \cup (10, 19]$$



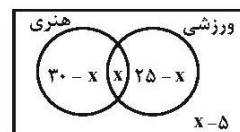
۲۷ عدد صحیح در مجموعه مدنظر وجود دارد.

(مجموعه، آکو و دنباله) (ریاضی، ا. صفحه‌های ۲ تا ۷)

26- گزینه «۲»

(حسن اسماعیلی)

اگر تعداد دانش‌آموزهای مشترک هر دو نوع مسابقه را برابر x در نظر بگیریم با توجه به نمودار ون داریم:



تعداد نفرات منفی نمی‌شود پس باید:

$$\begin{cases} 30 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 30 \\ x \geq 0 \\ 25 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 25 \\ x - 5 \geq 0 \rightarrow x \geq 5 \end{cases} \Rightarrow 5 \leq x \leq 25$$

تعداد دانش‌آموزهایی که می‌توانند در هر دو مسابقه شرکت کرده باشند با توجه به نمودار ون برابر x است پس حداکثر مقدار آن به ازای $x = 25$ یعنی برابر ۲۵ است. تعداد دانش‌آموزهایی که می‌توانند فقط در یک مسابقه شرکت کرده باشند برابر $55 - 2x$ می‌باشد پس حداکثر مقدار آن به ازای $x = 5$ یعنی برابر ۴۵ می‌تواند باشد.

$$\text{جواب نهایی} = \frac{25}{45} = \frac{5}{9}$$

(مجموعه، آکو و دنباله) (ریاضی، ا. صفحه‌های ۸ تا ۱۳)

27- گزینه «۴»

(سروش موینی)

می‌دانیم تفاضل جملات متوالی یک دنباله درجه دوم، تشکیل یک دنباله خطی (حسابی) می‌دهند، پس ادامه دنباله درجه ۲ به صورت روبه‌رو است:

$$\begin{array}{ccccccc} -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & & \\ 14, & 12, & 9, & 5, & 0, & -6, & \\ & & \downarrow & \downarrow & & & \\ & & \text{چهارم} & \text{ششم} & & & \end{array}$$

پس در دنباله حسابی $a_1 = 5$ و $a_7 = 16 = -6$ است، بنابراین

$$a_7 = a_1 + 6d = 5 + 6(-1) = -1$$

(مجموعه، آکو و دنباله) (ریاضی، ا. صفحه‌های ۱۳ تا ۲۴)

28- گزینه «۱»

(مفتی کریمی)

فرض می‌کنیم $\frac{9\pi}{m} = \theta$ و $a_1 = \cos \theta$ داریم:

$$a_2 = 2a_1^2 - 1 = 2\cos^2 \theta - 1 = \cos 2\theta$$

$$a_3 = 2\cos^2 2\theta - 1 = \cos 4\theta$$

$$\Rightarrow a_n = \cos 2^{n-1}\theta \Rightarrow a_6 = \cos 32\theta$$

$$\xrightarrow{a_6=1} 32\theta = 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{2k\pi}{32} = \frac{k\pi}{16} = \frac{9\pi}{m} \Rightarrow m = \frac{16 \times 9}{k}$$

بنابراین m می‌تواند ۱۶ باشد.

(مجموعه، آکو و دنباله) (ریاضی، ا. صفحه‌های ۱۳ تا ۲۰)

29- گزینه «۱»

(سعی پناهی)

$$a_{13} = 30$$

چون $15 + 11 = 26$ لذا طبق قاعده اندیس‌ها داریم:

$$a_{15}^2 - a_{11}^2 = 120$$

$$\Rightarrow (a_{15} - a_{11})(a_{15} + a_{11}) = 120$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{15} - a_{11} = 2 \\ a_{15} + a_{11} = 60 \end{cases} \Rightarrow a_{15} = 31$$

$$d = \frac{a_{15} - a_{13}}{15 - 13} = \frac{31 - 30}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_{20} = a_{13} + 7d = 30 + 7\left(\frac{1}{2}\right) = 30 + 3\frac{1}{2} = 33\frac{1}{2}$$

(مجموعه، آکو و دنباله) (ریاضی، ا. صفحه‌های ۲۱ تا ۲۳)

30- گزینه «۱»

(مهرزاد استقلالیان)

$$x - d, x, x + d \xrightarrow{\text{مجموع}} 3x = 15 \Rightarrow x = 5$$

$$(x + d)^3 = x^3 + 3x^2d + 3xd^2 + d^3$$

$$(x - d)^3 = x^3 - 3x^2d + 3xd^2 - d^3$$

$$(x - d)^3 + x^3 + (x + d)^3 = 3x^3 + 6xd^2 = 645$$

$$\Rightarrow 375 + 30d^2 = 645 \Rightarrow 30d^2 = 270$$

$$\Rightarrow d^2 = 9 \Rightarrow d = \pm 3$$

$$\Rightarrow \text{دنباله مد نظر: } 2, 5, 8 \text{ یا } 8, 5, 2$$

در هر ۲ حالت حاصل ضرب سه جمله این دنباله برابر است با:

$$2 \times 5 \times 8 = 80$$

(مجموعه، آکو و دنباله) (ریاضی، ا. صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

30- گزینه «۳»

(موردار استقلالیان)

جملات مشترک ۲ یا چند دنباله حسابی، خود تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند.
برای نوشتن جمله عمومی جملات مشترک چند دنباله حسابی، ابتدا با نوشتن چند جمله اول از هر دنباله، اولین جمله مشترک را پیدا می‌کنیم که اینجا عدد ۱۰ می‌باشد. قدرنسبت دنباله مطلوب، کوچکترین مضرب مشترک میان قدرنسبت هریک از دنباله‌های اولیه است.

$$\left. \begin{array}{l} d_A = 2 \\ d_B = 4 \\ d_C = 5 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ک.م.م.}} d = 20, a_1 = 10$$

$$\Rightarrow a_n = 10 + 20(n-1) \Rightarrow a_n = 20n - 10$$

$$\underline{\underline{\text{اعداد سه رقمی}}} \Rightarrow 1000 < 20n - 10 < 10000 \Rightarrow 110 < 20n < 10010$$

$$\Rightarrow 5/5 \leq n < 500/5 \Rightarrow n \in \{6, 7, \dots, 500\}$$

$$\text{تعداد جملات سه رقمی} = 500 - 6 + 1 = 495$$

(مجموعه، آکو و دنباله) (ریاضی، ص ۲۱ تا ۲۴)

32- گزینه «۲»

(مهاجرت نیکدام)

فرض کنیم ۴ جمله این دنباله به صورت a, aq, aq^2, aq^3 باشد.

$$\begin{cases} a - aq = 25 \\ aq^2 - aq^3 = 560 \end{cases} \Rightarrow \frac{aq^2(1-q)}{a(1-q)} = \frac{560}{25}$$

$$\Rightarrow q^2 = 16 \xrightarrow{q < 0} q = -4$$

$$\Rightarrow a - a(-4) = 25 \Rightarrow a = 5$$

$$5, -20, 80, -320 \Rightarrow \text{مجموع چهار جمله}$$

(مجموعه، آکو و دنباله) (ریاضی، ص ۲۵ تا ۲۷)

33- گزینه «۳»

(آریان میری)

با گویا کردن مخرج جملات دنباله‌های صورت سؤال داریم:

$$\text{دنباله حسابی با } \sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, \dots \Rightarrow d = \sqrt{2}, a_1 = \sqrt{2}$$

$$\text{دنباله هندسی با } \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, \dots \Rightarrow q = \sqrt{2}, a_1 = \sqrt{2}$$

جمله شانزدهم دنباله حسابی را پیدا می‌کنیم:

$$a_{16} = a_1 + 15d = \sqrt{2} + 15\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$$

حالا باید ببینیم کدام جمله دنباله هندسی با $a_1 = \sqrt{2}$ و $q = \sqrt{2}$ برابر است با $16\sqrt{2}$

$$a_n = a_1 q^{n-1} = 16\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}(\sqrt{2})^{n-1} = 16\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{2})^{n-1} = 16 \Rightarrow 2^{n-1} = 2^4$$

$$\Rightarrow n-1 = 4 \Rightarrow n = 5$$

(مجموعه، آکو و دنباله) (ریاضی، ص ۲۱ تا ۲۷)

34- گزینه «۴»

(راتیال ابراهیمی)

در دنباله حسابی، جمله عمومی به صورت $a_n = a_1 + (n-1)d$ است که a_1 و d به ترتیب جمله اول و قدرنسبت این دنباله هستند. همچنین اگر m, n و p سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند، رابطه $mp = n^2$ برقرار است. بنابراین برای جملات چهارم، نهم و سیزدهم از دنباله حسابی داریم:

$$a_4 a_{13} = (a_1)^2 \Rightarrow (a_1 + 3d)(a_1 + 12d) = (a_1 + 8d)^2$$

$$\Rightarrow a_1^2 + 15a_1 d + 36d^2 = a_1^2 + 16a_1 d + 64d^2$$

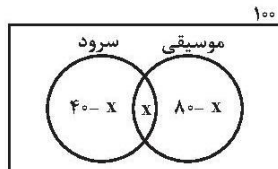
$$\Rightarrow 28d^2 + a_1 d = 0 \xrightarrow{d \neq 0} 28d + a_1 = 0 \Rightarrow a_4 = 0$$

(مجموعه، آکو، دنباله) (ریاضی، ص ۲۱ تا ۲۷)

35- گزینه «۴»

(آریان میری)

اگر کلاس را ۱۰۰ نفره و تعداد عضوهای مشترک دو گروه را x فرض کنیم، نمودار ون این کلاس به صورت زیر می‌شود:



چون هیچ اطلاعات دیگری راجع به تعداد اعضای گروه‌ها نداریم، تعداد اعضای اجتماع گروه‌ها را کوچکتر یا مساوی تعداد اعضای کل قرار می‌دهیم. یعنی داریم:

$$(40 - x) + x + (80 - x) \leq 100 \Rightarrow 120 - x \leq 100 \Rightarrow 20 \leq x$$

تعداد افرادی که فقط عضو گروه سرود هستند، برابر است با $40 - x$ ، پس داریم:

$$20 \leq x \Rightarrow -20 \geq -x \Rightarrow 20 \geq 40 - x$$

پس تعداد اعضای که فقط عضو گروه سرود هستند، حداکثر ۲۰ نفر، یعنی معادل ۲۰ درصد کلاس هستند.

(مجموعه، آکو و دنباله) (ریاضی، ص ۱۳ تا ۱۴)

36- گزینه «۱»

(سعید تن‌آرا)

جمله عمومی دنباله هندسی به صورت $a_n = a_1 r^{n-1}$ می‌باشد لذا:

$$\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} = \frac{1}{a_1 r^2} + \frac{1}{a_1 r^3} + \frac{1}{a_1 r^4} = \frac{1}{a_1 r^2} \left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}\right)$$

$$= \frac{1 + r + r^2}{a_1 r^4}$$

$$\text{بنابراین } (I). 1 + r + r^2 = \frac{21}{4} a_1 r^4$$

$$\text{از طرفی: } a_7 + a_8 + a_9 = a_1 r^6 + a_1 r^7 + a_1 r^8 = a_1 r^6 (1 + r + r^2)$$

$$\text{در نتیجه: } \frac{112}{3} \text{ و از تساوی (I) خواهیم داشت:}$$

$$a_1 r^6 \left(\frac{21}{4} a_1 r^4\right) = \frac{112}{3} \Rightarrow a_1^2 r^{10} = \frac{112}{3} \times \frac{4}{21} = \frac{64}{9}$$

$$\Rightarrow (a_1 r^5)^2 = \frac{64}{9} \Rightarrow (a_9)^2 = \frac{64}{9}$$

چون جملات دنباله مثبت است، بنابراین:

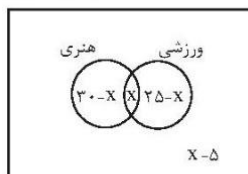
$$a_9 = \frac{8}{3}$$

(مجموعه، آکو و دنباله) (ریاضی، ص ۲۵ تا ۲۷)

37- گزینه «۲»

(فسن اسماعیلی)

اگر تعداد دانش آموزهای مشترک هر دو نوع مسابقه را برابر x در نظر بگیریم، با توجه به نمودار ون داریم:



تعداد نفرات منفی نمی شود، پس باید:

$$\begin{cases} 30-x \geq 0 \rightarrow x \leq 30 \\ x \geq 0 \\ 25-x \geq 0 \rightarrow x \leq 25 \\ x-5 \geq 0 \rightarrow x \geq 5 \end{cases} \Rightarrow 5 \leq x \leq 25$$

تعداد دانش آموزهایی که می توانند در هر دو مسابقه شرکت کرده باشند، با توجه به نمودار ون، برابر x است پس حداکثر مقدار آن برابر ۲۵ است.

تعداد دانش آموزهایی که می توانند فقط در یک مسابقه شرکت کرده باشند، برابر $x=5$ می باشد که حداکثر مقدار آن به ازای $x=5$ به دست می آید که برابر ۴۵ است.

(مجموعه، آکو و رناله) (ریاضی ۱، صفحه های ۸ و ۱۱)

38- گزینه «۱»

(معدی براتی)

در الگوی t_n اختلاف جملات ثابت نیست و این اختلاف جملات، دنباله حسابی (الگوی خطی) می سازند. پس t_n یک الگوی درجه دوم است. این دنباله حسابی که از اختلاف جملات دنباله درجه دوم به وجود می آید را با a_n نشان می دهیم:

$$\begin{matrix} t_1, t_2, t_3, t_4, \dots \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ a_1 \quad a_2 \quad a_3 \end{matrix}$$

قدر نسبت این دنباله حسابی ۵ و جمله اول آن ۶ است، بنابراین:

$$\begin{matrix} 3, 9, 20, 36, 57, \dots \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ 6 \quad 11 \quad 16 \quad 21 \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ 5 \quad 5 \quad 5 \end{matrix} \quad a_n = 6 + (n-1) \times 5 = 5n + 1$$

با توجه به الگوی درجه دوم، واضح است که $t_{49} - t_{46}$ برابر است با:

$$\begin{aligned} & a_{46} + a_{47} + a_{48} \\ & \begin{matrix} t_1, t_2, t_3, t_4, \dots, t_{46}, t_{47}, t_{48}, t_{49}, \dots \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_{46} \quad a_{47} \quad a_{48} \end{matrix} \\ & a_{46} + a_{47} + a_{48} = \\ & 5 \times 46 + 1 + 5 \times 47 + 1 + 5 \times 48 + 1 = 5(46 + 47 + 48) + 3 \\ & = 5 \times 141 + 3 = 708 \end{aligned}$$

(مجموعه، آکو و رناله) (ریاضی ۱، صفحه های ۱۳ و ۱۴)

39- گزینه «۱»

(معمد ابراهیم توژنره وانی)

جمله عمومی یک دنباله حسابی با جمله اول a_1 و قدر نسبت d به صورت $a_n = a_1 + (n-1)d$ و جمله عمومی یک دنباله هندسی با جمله اول b_1 و قدر نسبت q به صورت $b_n = b_1 q^{n-1}$ است.

$$b_8 - b_6 = 30d \rightarrow b_8 - b_6 = 30d$$

$$\rightarrow b_1 q^7 - b_1 q^5 = 30d \rightarrow d = \frac{b_1 q^5 (q^2 - 1)}{30} \quad (I)$$

از طرفی داریم:

$$b_8 - b_6 = d \rightarrow b_1 q^7 - b_1 q^5 = d \quad (II)$$

$$(I), (II) \rightarrow \frac{b_1 q^7 - b_1 q^5}{30} = b_1 q^7 - b_1 q^5$$

$$\Rightarrow \frac{q^7 - q^5}{30} = q^7 - q^5$$

$$\rightarrow \frac{q^5 (q^2 - 1)}{30} = q^5 (q^2 - 1) \rightarrow q^2 - 1 = 30(q^2 - 1)$$

$$\rightarrow q(q^2 - 1) = 30(q^2 - 1) \rightarrow q(q+1)(q-1) = 30(q-1)$$

$$\xrightarrow{q \neq 1} q(q+1) = 30 \xrightarrow{5 \times 6 = 30} q = 5$$

(مجموعه، آکو و رناله) (ریاضی ۱، صفحه های ۲۱ و ۲۲)



1 - چه تعداد از اعداد زیر گویا نیستند؟

- (الف) $\sqrt{324}$ (ب) $\sqrt{2}\sqrt{2}$ (پ) $\sqrt[3]{343}$ (۴) صفر

پاسخ: گزینه ۱ (صفحه ۲-متوسط)

هر تست ماز یک کلاس درس!

مجموعه اعداد طبیعی \mathbb{N} و حسابی \mathbb{W} و صحیح \mathbb{Z} و گویا \mathbb{Q} و حقیقی \mathbb{R} به صورت زیر با هم در ارتباطند.

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

بنابراین $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ مجموعه اعداد غیر گویاست که به آنها اعداد گنگ می‌گوییم و آنها را با نماد \mathbb{Q}' نمایش می‌دهیم.

بررسی موارد:

$$324 = 3^4 \times 2^2 \Rightarrow \sqrt{324} = 18$$

(الف)

که عددی گویاست.

(ب) $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ عددی گنگ است اگر گویا بود در این صورت:

$$(\sqrt{2})^{\sqrt{2}} = r \Rightarrow ((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = r^{\sqrt{2}} \Rightarrow 2 = r^{\sqrt{2}}$$

در صورتیکه یک عدد گویا به توان $\sqrt{2}$ هیچ‌گاه برابر ۲ نمی‌شود.

$$343 = 7^3 \Rightarrow \sqrt[3]{343} = 7$$

(پ) عددی گویاست

گروه آموزشی ماز

2 - اگر $A \subset B$ کدام مورد همواره صحیح است؟

- (۱) اگر B نامتناهی باشد، آنگاه $B - A$ نامتناهی است.
(۲) اگر A نامتناهی باشد، آنگاه $B - A$ متناهی است.
(۳) اگر $B - A$ متناهی باشد، آنگاه B متناهی است.
(۴) اگر $B - A$ نامتناهی باشد، آنگاه B نامتناهی است.

پاسخ: گزینه ۴ (صفحه ۷۵ تا ۷۶-متوسط)

هر تست ماز یک کلاس درس!

اگر $A \subset B$ در صورتیکه B نامتناهی باشد $B - A$ ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد.

ولی اگر B متناهی باشد همواره $B - A$ هم متناهی است در واقع یک مجموعه نامتناهی هم زیرمجموعه‌ی متناهی دارد هم نامتناهی ولی یک مجموعه‌ی متناهی تمام زیرمجموعه‌هایش متناهی هستند. همین‌طور اگر یکی از زیرمجموعه‌های یک مجموعه، نامتناهی باشد حتماً مجموعه‌ی مورد نظر نامتناهی است.

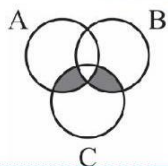
بررسی گزینه‌ها:

برای موارد ۱ تا ۳ مثال نقض می‌زنیم:

اگر B مجموعه‌ی اعداد حسابی و A مجموعه اعداد طبیعی باشد، $(B - A = \{0\})$ متناهی است و اگر B اعداد صحیح و A اعداد طبیعی باشد $(B - A = \{0, -1, -2, \dots\})$ نامتناهی است.

این دو مثال برای رد کردن هر سه گزینه ۱ و ۲ و ۳ مناسب است و اما در مورد گزینه ۴ دقت کنید $(B - A) \subset B$ و می‌دانیم اگر یکی از زیرمجموعه‌های یک مجموعه نامتناهی باشد حتماً آن مجموعه نامتناهی است.

www.biomaze.ir

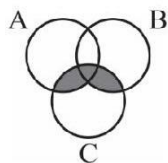


- (۱) $(C \cap A) \cup (C \cap B)$
(۲) $C - (A \cap B)$
(۳) $C \cap ((A - B) \cup (B - A))$
(۴) $(C - A) \cup (C - B) - (A \cap B)$

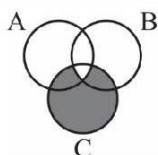
3 - در شکل زیر قسمت هاشور خورده مربوط به کدام گزینه است؟

پاسخ: گزینه ۳ (صفحه ۸ تا ۱۳-متوسط)

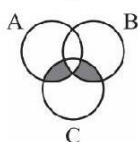
بررسی گزینه‌ها:



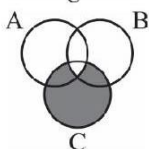
- (۱) $(C \cap A) \cup (C \cap B)$



$$C - (A \cap B) \quad (2)$$



$$C \cap ((A - B) \cup (B - A)) \quad (3)$$



$$(C - A) \cup (C - B) - (A \cap B) \quad (4)$$

گروه آموزشی ماز

4 - اگر مجموعه‌ی A مضارب طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰ عدد ۶، و مجموعه‌ی B مضارب طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰ عدد ۴ باشد و مجموعه‌ی مرجع، اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰ باشد تعداد اعضای $A' \cap B'$ برابر کدام است؟

۶۴ (۴)

۶۳ (۳)

۶۷ (۲)

۶۸ (۱)

(صفحه ۱۳ تا ۱۴ - متوسط)

پاسخ: گزینه ۲

هر تست ماز یک کلاس درس!

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$n(A') = n(U) - n(A)$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$6 \times 1 = 6, 6 \times 2 = 12, \dots, 6 \times 16 = 96 \Rightarrow n(A) = 16$$

اعضای A به صورت:

$$4 \times 1 = 4, 4 \times 2 = 8, \dots, 4 \times 24 = 96 \Rightarrow n(B) = 24$$

و اعضای B به صورت:

از طرفی $A \cap B$ مضارب ۱۲ کوچک‌تر از ۱۰۰ است که به صورت:

$$12 \times 1 = 12, 12 \times 2 = 24, \dots, 12 \times 8 = 96 \Rightarrow n(A \cap B) = 8$$

بنابراین:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 16 + 24 - 8 = 32$$

$$n(A' \cap B') = n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B) = 99 - 32 = 67$$

بنابراین:

www.biomaze.ir

5 - در یک کلاس ۳۰ نفری ۲۳ نفر فوتبال بازی می‌کنند و ۱۵ نفر معدل بالای ۱۷ دارند اگر تنها ۳ نفر باشند که نه معدل بالای ۱۷ دارند و نه فوتبال بازی می‌کنند، در این صورت چند نفر فوتبال بازی می‌کنند و معدل بالای ۱۷ ندارند؟

۹ (۴)

۱۰ (۳)

۱۲ (۲)

۱۱ (۱)

(صفحه ۱۳ تا ۱۴ - متوسط)

پاسخ: گزینه ۲

هر تست ماز یک کلاس درس!

در مورد دو مجموعه A و B در حالت کلی، مطالب زیر برقرار است:

$$1) n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = n(U) - n(A' \cap B')$$

$$2) n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

تعداد افراد کلاس ۳۰ نفر است و تعداد افرادی که نه فوتبال بازی می‌کنند و نه معدل بالای ۱۷ دارند ۳ نفر، پس بقیه یا فوتبال بازی می‌کنند و یا معدل بالای ۱۷ دارند. یعنی:

$$n(A \cup B) = n(U) - n(A' \cap B') = 30 - 3 = 27$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow$$

$$27 = 23 + 15 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 11$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 23 - 11 = 12$$

(A) مجموعه فوتبالیست‌ها و B مجموعه‌ی افرادی است که معدل بالای ۱۷ دارند).

سؤالات منتخب

۱. در یک کلاس ۳۹ نفری، ۱۶ نفر در گروه ورزش، ۱۲ نفر در گروه روزنامه دیواری و ۹ نفر فقط در گروه ورزش هستند. چند نفر آنان عضو هیچ‌یک از این دو گروه نیستند؟
(کنکور ۹۸ ریاضی)

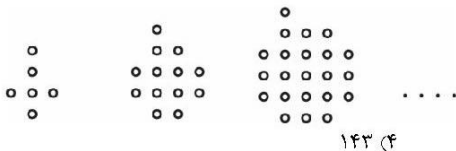
۱۵ (۱) ۱۶ (۲) ۱۷ (۳) ۱۸ (۴) ✓

۲. در یک کلاس ۴۲ نفری، ۱۵ نفر عضو گروه آزمایشگاهی و ۱۲ نفر عضو گروه فوتبال و ۷ نفر آنان عضو هر دو گروه هستند. چند نفر آنان عضو هیچ‌یک از این دو گروه نیستند؟ (کنکور ۹۸ ریاضی خارج)

۱۵ (۱) ۱۸ (۲) ۲۱ (۳) ۲۲ (۴) ✓

گروه آموزشی ماز

6 - مطابق الگوی زیر در شکل دهم چند دایره وجود دارد؟



۱۴۳ (۴)

۱۴۱ (۳)

۲۰۱ (۲)

۲۰۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ (صفحه ۱۴ تا ۲۷ متوسط)

هر تست ماز یک کلاس درس!

الگوهای که باید بشناسیم:

(۱) الگوی خطی: $t_n = an + b$

(۲) الگوی مربعی: $a_n = n^2$

(۳) الگوی هندسی: $t_n = ar^{n-1}$

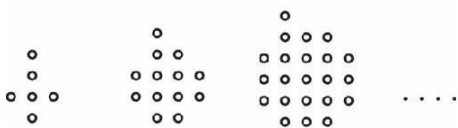
(۴) الگوی مثلثی: $b_n = \frac{n(n+1)}{2}$

و همچنین الگوها یا دنباله‌هایی که از جمع یا تفاضل یا ضرب یک عدد در هر یک ساخته می‌شوند (و یا با مجموع و تفاضل آنها با هم ساخته می‌شود، البته الگوهای دیگری هم وجود دارند که در کتاب ما نیامده‌اند، مثل الگوهای بازگشتی که در آنها هر جمله جدید با رابطه‌ای از جمله یا جملات قبلی به دست می‌آید).

الگوی تعداد دایره‌ها به صورت زیر است:

شکل:

(۱) (۲) (۳)



$$1^2 + 4(1) + 1 \quad 2^2 + 4(2) + 1 \quad 3^2 + 4(3) + 1 \dots a_n = n^2 + 4n + 1 \xrightarrow{n=10} a_{10} = 141$$

www.biomaze.ir

7 - کوچکترین عدد طبیعی که هم مجموع ۱۰ عدد طبیعی متوالی است و هم مجموع ۹ عدد طبیعی متوالی، کدام است؟

۴۵ (۱) ۹۰ (۲) ۱۳۵ (۳) ۴۹۵ (۴)

پاسخ: گزینه ۳ (صفحه ۲۰ سخت)

هر تست ماز یک کلاس درس!

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = n \left(\frac{n+1}{2} \right)$$

در حالت کلی‌تر، مجموع n جمله‌ی متوالی دنباله‌ی حسابی، برابر تعداد جملات ضرب در میانگین جملات است، یعنی:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = n \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right)$$

$$\underbrace{(n-9)+(n-8)+\dots+(n)}_{\text{مجموع ۱۰ عدد طبیعی متوالی}} = 1 \cdot \left(\frac{n-9+n}{2} \right)$$

مجموع ۱۰ عدد طبیعی متوالی

$$\underbrace{(m-8)+(m-7)+\dots+m}_{\text{مجموع ۹ عدد طبیعی متوالی}} = 9 \left(\frac{m-8+m}{2} \right)$$

مجموع ۹ عدد طبیعی متوالی

$$1 \cdot \left(\frac{2n-9}{2} \right) = 9 \left(\frac{2m-8}{2} \right) \Rightarrow 5(2n-9) = 9(m-4) \Rightarrow \begin{cases} m-4 = 5k \\ 2n-9 = 9k \end{cases}$$

ولی چون دنبال کوچکترین هستیم اگر $k=1$ را در نظر بگیریم $(n=9 \leq 2n-9=9)$ به دست می آید که جمله اول صفر می شود و غیر طبیعی است و به ازای $k=2$ داریم: $\left(n = \frac{27}{2} \leq 2n-9=18 \right)$ که n غیر طبیعی است ولی به ازای $k=3$ ، n طبیعی می شود پس $2n-9=27$ و $n=18$ و عدد مورد نظر برابر:

$$9+10+\dots+18 = 1 \cdot \left(\frac{9+18}{2} \right) = 135$$

$$m-4=15 \Rightarrow m=19 \Rightarrow 11+12+\dots+19 = 9 \left(\frac{11+19}{2} \right) = 135$$

توجه کنید به ازای $k=3$:

گروه آموزشی ماز

- 8 - در یک دنباله حسابی اگر مجموع جملات سوم و هفتم برابر پانزده و مجموع جملات نهم و بیست و یکم برابر بیست و نه باشد، جمله ی دهم برابر کدام است؟

۹ (۴)

۱۰ (۳)

۱۲ (۲)

۱۱ (۱)

(صفحه ۲۴ تا ۲۵ متوسط)

پاسخ: گزینه ۱

هر تست ماز یک کلاس درس!

در هر دنباله حسابی داریم:

$$t_n + t_m = t_s + t_t \Leftrightarrow n + m = s + t$$

همین طور ممکن است تعداد جملات هر طرف بیشتر از دو تا باشد ولی برای اینکه بتوانیم از این نکته استفاده کنیم باید حتماً تعداد جملات دو طرف برابر و نیز مجموع اندیس های دو طرف هم برابر باشند. مثلاً:

$$t_1 + t_7 + t_{19} = t_9 + t_9 + t_9 = t_7 + t_8 + t_{17}$$

نکته مشابهی در مورد دنباله هندسی هم وجود دارد. در هر دنباله هندسی:

$$a_m \times a_n = a_s \times a_t \Leftrightarrow m + n = s + t$$

$$a_1 \times a_9 = a_3 \times a_7 = a_5 \times a_5$$

مثلاً:

روش اول: اگر جمله اول برابر a و قدرنسبت برابر d باشد:

$$\begin{cases} t_7 + t_7 = 15 \Rightarrow a + 6d + a + 6d = 15 \\ t_9 + t_{19} = 29 \Rightarrow a + 8d + a + 20d = 29 \\ - \begin{cases} 2a + 12d = 15 \\ 2a + 28d = 29 \end{cases} \end{cases}$$

$$20d = 14 \Rightarrow d = 0.7 \Rightarrow a = 4/7$$

$$t_{11} = a + 10d = 4/7 + 10 \times 0.7 = 11$$

روش دوم: براساس نکته ی آمده در درسامه داریم:

$$t_7 + t_7 + t_9 + t_{19} = 4t_{11} = 44 \Rightarrow t_{11} = 11$$

$$3 + 7 + 9 + 21 = 10 + 10 + 10 + 10 = 40$$

زیرا:

سوالات منتخب

اگر حاصل ضرب جملات دوم و هشتم یک دنباله هندسی برابر ۳ باشد حاصل $a_1 \times a_3 \times a_7 \times a_9$ برابر کدام است؟

۸۱ (۴)

۲۷ (۳)

✓ ۹ (۲)

۳ (۱)

www.biomaze.ir

- 9 - اگر t_n یک دنباله هندسی غیر یکنوا باشد و t_1 , bt_7 , t_3 سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند حدود b کدام است؟

$b \leq -1$ (۴)

$b \geq 1$ (۳)

$|b| \geq 1$ (۲)

$|b| \leq 1$ (۱)

هر تست ماز یک کلاس درس!

الف) جمله عمومی دنباله حسابی به صورت زیر است:

$$t_n = a + (n-1)d \quad (d \text{ قدرنسبت و } a \text{ جمله‌ی اول است})$$

اگر a, b, c سه جمله متوالی دنباله حسابی باشند $2b = a + c$ است.

ب) جمله عمومی دنباله هندسی به صورت زیر است:

$$t_n = ar^{n-1} \quad (r \text{ قدرنسبت و } a \text{ جمله‌ی اول است})$$

اگر a, b, c سه جمله متوالی دنباله هندسی باشند $b^2 = ac$ است.

$$t_1 = a \quad t_2 = ar \quad t_3 = ar^2$$

حال به خاطر این که سه عدد t_1, t_2, t_3 سه جمله متوالی دنباله حسابی باشند باید داشته باشیم:

$$2t_2 = t_1 + t_3 \xrightarrow{+a} 2ar = a + ar^2$$

$$2b^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow b^2 \geq 2 \Rightarrow |b| \geq \sqrt{2}$$

و شرط وجود جواب برای معادله $2b^2 - 4 = 0$ ، دلتای نامنفی است، یعنی:

از طرفی چون دنباله هندسی غیر یکنواست $r < 0$ و بنابراین مجموع ریشه‌ها که برابر $2b$ است باید منفی باشد پس $b < 0$ هم هست بنابراین $b \leq -1$ جواب است.

نکته: اگر جملات k ام و m ام و s ام یک دنباله‌ی حسابی به ترتیب سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، قدرنسبت دنباله هندسی برابر است با:

$$r = \frac{s-m}{m-k}, \quad \frac{a_m}{a_k} = \frac{a + (m-1)d}{a + (k-1)d} = r$$

سوالات منتخب

۱. جملات سوم، هفتم و شانزدهم یک دنباله‌ی حسابی، جملات متوالی یک دنباله‌ی هندسی، هستند. قدرنسبت دنباله‌ی هندسی، کدام است؟

(کنکور ۹۹ تهرانی - خارج از کشور)

$$\checkmark \frac{9}{4} \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$\frac{3}{2} \quad (2)$$

$$\frac{4}{3} \quad (1)$$

۲. جملات اول و سوم و هفدهم یک دنباله حسابی تشکیل دنباله هندسی می‌دهند قدرنسبت دنباله حسابی چند برابر جمله‌ی اول آن است؟

$$1 \quad (4)$$

$$4 \quad (3)$$

$$\checkmark 3 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

گروه آموزشی ماز

10 - مقدار n از معادله $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 511$ برابر کدام است؟

$$9 \quad (4)$$

$$10 \quad (3)$$

$$7 \quad (2)$$

$$8 \quad (1)$$

هر تست ماز یک کلاس درس!

با وجودی که این تو کتابتون نیست ولی با توجه به تست کنکوری که در زیر آوردم لابد باید بلد باشیم.

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

اینم بدون که اگر تعداد جملات بی‌نهایت باشد و البته $|r| < 1$ باشد:

$$a + ar + ar^2 + \dots = \frac{a}{1 - r}$$

در واقع روش دوم که در پاسخ آمده اثباتی برای مطالب بالاست.

روش اول:

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = \frac{1(2^n - 1)}{2 - 1} = 511 \Rightarrow 2^n = 512 \Rightarrow n = 9$$

روش دوم: اگر فرض کنیم $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = A$

$$2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2A \Rightarrow$$

$$A - 1 + 2^n = 2A \Rightarrow A = 2^n - 1 = 511 \Rightarrow 2^n = 512 \Rightarrow n = 9$$

سوالات منتخب

۱. اگر $\frac{3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x+4} + 3^{x+5}}{3^{x-2} + 3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3}} = 52$ باشد، مقدار x کدام است؟ (کنکور ۱۳۰۰)

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۲. از بالای یک ساختمان به ارتفاع ۶ متر تویی را به زمین پرتاب می‌کنیم. توپ پس از هر بار برخورد به زمین به اندازه‌ی $\frac{1}{8}$ ارتفاع قبلی از زمین به‌صورت قائم بلند می‌شود. پس از صد بار برخورد به زمین، در مجموع، توپ تقریباً چند متر بالا و پایین رفته است؟ (کنکور ۱۳۰۰ فارغ از کشور)

۱ (۱) ۵۴ (۲) ۵۷ (۳) ۶۰ (۴) ۶۶

۱۱ - A و B دو مجموعه از مجموعه مرجع U عضو باشند به‌طوری‌که $n(A) = 35$ ، $n(A - B') = 15$ و $n(A' - B) = 5$ است. تعداد اعضای مجموعه B کدام است؟

۱ (۱) ۳۵ (۲) ۴۵ (۳) ۴۰ (۴) ۳۰

(ریاضی ۱ - صفحه ۱۳ - متوسط)

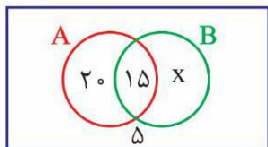
پاسخ: گزینه ۲

اگر شرایط داده شده را بررسی کنیم داریم:

$$n(A - B') = n(A \cap B) = 15$$

$$n(A' - B) = n(A' \cap B') = n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B) = 5$$

U



$$n(A \cap B) = 15 \Rightarrow n(A - B) = 20$$

$$n(A) = 35$$

$$\Rightarrow 20 + 15 + x + 5 = 70$$

$$\Rightarrow x = 30$$

$$\Rightarrow n(B) = n(B - A) + n(A \cap B) = 30 + 15 = 45$$

www.biomaze.ir

۱۲ - هرگاه a ، $2a + b$ ، λb سه جمله ابتدایی از دنباله هندسی باشند، جمله چهارم این دنباله کدام است؟

۱ (۱) $32a + 4\lambda b$ (۲) $\lambda a + 16b$ (۳) $4\lambda a + \lambda b$ (۴) $64b$

(ریاضی ۱ - صفحه ۲۵ و ۲۶ - متوسط)

پاسخ: گزینه ۳

نکته: اگر α, β, γ جملات متوالی از یک دنباله باشند، آنگاه $\alpha\gamma = \beta^2$.

پس برای آن که جملات a ، $2a + b$ ، λb سه جمله ابتدایی دنباله هندسی باشند باید:

$$(2a + b)^2 = \lambda b \times a \Rightarrow 4a^2 + b^2 + 4ab = \lambda ab$$

$$\Rightarrow 4a^2 + b^2 - 4ab = 0 \Rightarrow (2a - b)^2 = 0 \Rightarrow 2a = b$$

از طرفی اگر q را قدرنسبت دنباله هندسی در نظر بگیریم، داریم:

$$\frac{2a + b}{a} = q \Rightarrow q = \frac{2a + 2a}{a} = 4 \Rightarrow q = 4$$

پس به این ترتیب داریم: a ، $4a$ ، $16a$ ، $64a$

یعنی جمله چهارم $64a = 32b$ خواهد بود.

$$a_4 = 64a = 4\lambda a + 16a = 4\lambda a + \lambda b$$

13 - اگر دو مجموعه A و C نامتناهی و مجموعه B متناهی باشد، کدام یک از مجموعه
الف - $(A \cup C) \cap B$ ب - $(B \cup C) \cup A$ پ - $C - (A \cup B)$

(۱) الف، پ (۲) ب، پ (۳) فقط ب (۴) فقط پ

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۱- صفحه ۱ تا ۱۲- ساده)

هر تست ماز یک کلاس درس!

- (۱) اگر تعداد اعضای یک مجموعه قابل شمارش باشد، آن را **متناهی** و در غیر این صورت آن را **نامتناهی** می‌نامند. به عنوان مثال مجموعه‌ای که شامل اعداد طبیعی کوچکتر از ۱۰۰ باشد، مجموعه‌ای متناهی است چون تعداد اعضای آن قابل شمارش است و مجموعه‌ای که شامل همه اعداد طبیعی باشد یک مجموعه نامتناهی است چون تعداد اعضای آن قابل شمارش نیست.
- (۲) اگر A و B دو مجموعه متناهی باشند، مجموعه‌های $A \cup B$ ، $A \cap B$ ، $A - B$ و $B - A$ همگی **متناهی** هستند.
- (۳) اگر A و B دو مجموعه نامتناهی باشند، مجموعه $A \cup B$ نامتناهی بوده، اما در رابطه با مجموعه‌های $A \cap B$ ، $A - B$ و $B - A$ نمی‌توان اظهار نظر کرد، چرا که ممکن است متناهی یا ممکن است نامتناهی باشند.
- (۴) اگر A یک مجموعه متناهی و B یک مجموعه نامتناهی باشد، آن‌گاه مجموعه‌های $A \cup B$ و $B - A$ **نامتناهی** و مجموعه‌های $A \cap B$ و $A - B$ **متناهی** هستند.

الف- می‌دانیم اشتراک یک مجموعه متناهی با هر مجموعه دلخواه قطعاً متناهی خواهد بود. چون B متناهی است، پس $(A \cup C) \cap B$ متناهی است.
ب- می‌دانیم اجتماع یک مجموعه نامتناهی با هر مجموعه دلخواه قطعاً نامتناهی خواهد بود از آن‌جا که A نامتناهی است، پس $(B \cup C) \cup A$ قطعاً نامتناهی است.

پ- مجموعه‌های $A \cup B$ و C نامتناهی هستند، از طرفی تفاضل دو مجموعه نامتناهی الزاماً نامتناهی نیست، پس $C - (A \cup B)$ **الزاماً نامتناهی نیست**.

سوالات منتخب:

- ۱- چه تعداد از عبارت‌های زیر درست است؟
الف- اگر مجموعه $A \cup B$ نامتناهی باشد، A و B هر دو نامتناهی هستند.
ب- اگر مجموعه‌های A و B متناهی باشند، مجموعه $A \cup B$ هم متناهی است.
پ- اگر A مجموعه‌ای نامتناهی و B مجموعه‌ای متناهی باشد، مجموعه $A \cap B$ حتماً متناهی است.
- (۱) ۱ (۲) ۲ ✓ (۳) ۳ (۴) صفر
- ۲- از متناهی بودن کدام مجموعه زیر، می‌توان نتیجه گرفت مجموعه‌های A و B هر دو متناهی هستند؟
(۱) $A - B$ (۲) $A \cup B$ ✓ (۳) $A \cap B$ (۴) هیچکدام

گروه آموزشی ماز

14 - در یک کلاس ۲۸ نفره، تعداد افرادی که در درس A قبول شده‌اند، $\frac{2}{3}$ تعداد افرادی است که در درس B قبول شده‌اند، اگر تعداد افرادی که در هر دو درس قبول شده‌اند ثلث تعداد افرادی باشد که در درس A قبول شده‌اند و ۲ نفر در هیچ یک از دو درس قبول نشده باشند، تعداد افرادی که فقط در یکی از دو درس قبول شده‌اند کدام است؟

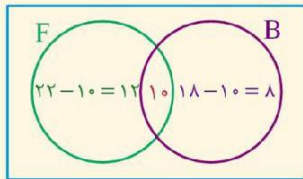
(۱) ۱۶ (۲) ۱۸ (۳) ۲۰ (۴) ۲۲

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۱- صفحه ۱ تا ۱۲- متوسط)

هر تست ماز یک کلاس درس!

- در برخی مسائل، اطلاعاتی عددی در مورد مجموعه‌ها داده می‌شود و در رابطه با تعداد اعضای مجموعه‌هایی مانند $A \cup B$ ، $A \cap B$ و ... سوال‌هایی مطرح می‌شود. برای راحتی کار می‌توانیم از نمودار ون استفاده کنیم.

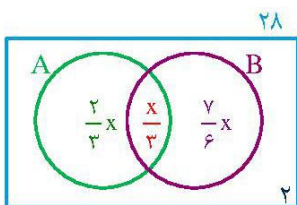
مثال: در یک کلاس ۵۰ نفری، ۱۸ نفر عضو تیم بسکتبال و ۲۲ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۰ نفر عضو هر دو تیم هستند. چند نفر از آن‌ها عضو هیچ تیمی نیستند؟ با استفاده از نمودار ون داریم:



$$\Rightarrow 50 - (12 + 8 + 10) = 20$$

پس ۲۰ نفر عضو هیچ تیمی نیستند.

اگر تعداد افرادی که در درس A قبول شده‌اند را x در نظر بگیریم، با توجه به صورت مسئله داریم:



$$n(A) = \frac{2}{3}n(B) \Rightarrow n(B) = \frac{3}{2}n(A) = \frac{3}{2}x \text{ و } n(A \cap B) = \frac{1}{3}n(A) = \frac{1}{3}x$$

$$\begin{cases} n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = \frac{3}{2}x - \frac{x}{3} = \frac{5}{6}x \\ n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = x - \frac{x}{3} = \frac{2}{3}x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}x + \frac{x}{3} + \frac{5}{6}x = 28 \Rightarrow \frac{13x}{6} = 28 \Rightarrow x = 12$$

$$\begin{cases} n(A - B) = \frac{2}{3}x = 8 \\ n(B - A) = \frac{5}{6}x = 10 \end{cases} \Rightarrow n(A - B) + n(B - A) = 8 + 10 = 18$$

سوالات منتخب:

۱- در یک کلاس ۳۹ نفری، ۱۶ نفر در گروه ورزش، ۱۲ نفر در گروه روزنامه‌دیواری و ۹ نفر فقط در گروه ورزشی هستند. چند نفر از آنان عضو هیچ‌یک از دو گروه نیستند؟

۱۵ (۱) ۱۶ (۲) ۱۷ (۳) ۱۸ (۴) ✓

۲- در یک کلاس ۵۰ نفری، ۳۵ نفر در درس ریاضی و ۳۰ نفر در درس فیزیک قبول شده‌اند. اگر ۱۰ نفر در هر دو درس مردود شده باشند، چند نفر در هر دو درس قبول شده‌اند؟

۱۵ (۱) ۲۵ (۲) ✓ ۱۸ (۳) ۲۲ (۴)

www.biomaze.ir

15 - در یک دنباله اعداد $t_1 = -1$ و برای هر $n \geq 2$ رابطه $t_n = nt_{n-1} + (n-2)!$ برقرار است، چندمین جمله دنباله برابر -120 است؟

(۱) جمله چهارم (۲) جمله پنجم (۳) جمله ششم (۴) جمله هفتم

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی دهم- صفحه ۱۴ تا ۲۷ متوسط)

هرتست ماز یک کلاس درس!

- دنباله‌های بازگشتی، دنباله‌هایی هستند که در آن هر جمله براساس جملات قبلی محاسبه می‌شود. به عبارت دیگر به جای آن که ضابطه دنباله را به صورت صریح برحسب متغیری مانند n در اختیار داشته باشیم، رابطه بین جملات دنباله را در اختیار داریم.

مثال: جمله پنجم دنباله زیر را که در آن $t_1 = 0$ و $t_2 = 1$ است را بیابید.

$$t_n = (n^2 - n)t_{n-2} + 5t_{n-1}, \quad n \geq 3$$

$$t_3 = (3^2 - 3)t_1 + 5t_2 \Rightarrow t_3 = (6)(0) + (5)(1) = 5$$

$$t_4 = (4^2 - 4)t_2 + 5t_3 \Rightarrow t_4 = (12)(1) + (5)(5) = 12 + 25 = 37$$

$$t_5 = (5^2 - 5)t_3 + 5t_4 \Rightarrow t_5 = (20)(5) + (5)(37) = 100 + 185 = 285$$

با توجه به رابطه $t_n = nt_{n-1} + (n-2)!$ برای $n \geq 2$ ، حاصل هر جمله را بدست می‌آوریم:

$$t_2 = 2(t_1) + 0! = -2 + 1 = -1$$

$$t_3 = 3(t_2) + 1! = -3 + 1 = -2$$

$$t_4 = 4(t_3) + 2! = -8 + 2 = -6$$

$$t_5 = 5(t_4) + 3! = -30 + 6 = -24$$

$$t_6 = 6(t_5) + 4! = -144 + 24 = -120$$

پس $t_6 = -120$

سوالات منتخب:

۱- مجموع شش جمله اول دنباله $t_n = \begin{cases} (n-1)! & \text{فرد } n \\ (n-1)^2 & \text{زوج } n \end{cases}$ کدام است؟

۴۹ (۱) ۵۸ (۲) ۶۲ (۳) ✓ ۷۰ (۴)

۲- در یک دنباله اعداد $t_1 = -4$ و برای هر $n \geq 2$ رابطه $t_n = 3t_{n-1} + n^2$ برقرار است. جمله پنجم این دنباله کدام است؟

۶۲ (۱) ✓ -۶۲ (۲) -۶۰ (۳) ۶۰ (۴)

۱۶- در یک دنباله حسابی غیر ثابت $t_6 = 12$ می باشد. اگر سه برابر جمله ششم این دنباله، واسطه هندسی بین جمله سوم و نه برابر جمله هشتم این دنباله باشد، t_5 کدام است؟

۷۶ (۱) -۷۶ (۲) -۷۸ (۳) ۷۸ (۴)

(ریاضی ۱- صفحه ۱۴ تا ۲۷- متوسط)

پاسخ: گزینه ۲

هر تست ماز یک کلاس درس!

(۱) جمله عمومی یک دنباله حسابی با قدرنسبت d و جمله اول t_1 به صورت $t_n = t_1 + (n-1)d$ است.

(۲) اگر a, b و c سه جمله متوالی دنباله هندسی باشند: $b^2 = ac$ (ب واسطه هندسی a و c است).

مثال: اگر n و m به ترتیب سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی با قدرنسبت مثبت باشند و $\frac{3}{5}$ برابر جمله میانی واسطه هندسی بین جملات قبل و بعد از خودش باشد، m و n را بدست آورید.

با توجه به خواص دنباله حسابی، می دانیم $n = 5 + d$ و $m = 5 - d$ است، پس:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = (m)(n) \Rightarrow 9 = (5-d)(5+d) \Rightarrow 9 = 25 - d^2$$

$$\Rightarrow d^2 = 16 \xrightarrow{d>0} d=4 \Rightarrow n=5+4=9, m=5-4=1$$

می توانیم جمله سوم را به صورت $t_6 - 3d$ و جمله هشتم را به صورت $t_6 + 2d$ بنویسیم و با توجه به شرط ایجاد واسطه هندسی داریم:

$$(3t_6)^2 = (t_7)(9t_8) \Rightarrow 9t_6^2 = (t_6 - 3d)(9)(t_6 + 2d)$$

$$t_6^2 = (t_6 - 3d)(t_6 + 2d) \Rightarrow t_6^2 = t_6^2 - t_6d - 6d^2 \Rightarrow d(t_6 + 6d) = 0$$

غیر قابل قبول است چون دنباله حسابی غیر ثابت است $d=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = -\frac{t_6}{6} = \frac{-12}{6} = -2 \end{cases}$$

$$t_{5.} = t_6 + 4d = 12 + 4(-2) = 12 - 8 = -4$$

سوالات منتخب:

۱- اگر جملات دوم، دو برابر جمله چهارم و چهار برابر جمله هفتم یک دنباله حسابی به ترتیب سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند، قدرنسبت دنباله هندسی کدام است؟

۴ (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۲ (۳) ✓ ۳ (۴)

۲- در یک دنباله هندسی، جمله دوم، دو برابر جمله پنجم و جمله هشتم می توانند سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند. بزرگترین این سه عدد چند برابر کوچکترین آن هاست؟

۲ + $\sqrt{3}$ (۱) $5 + 2\sqrt{3}$ (۲) $5 + 4\sqrt{3}$ (۳) ✓ $7 + 4\sqrt{3}$ (۴)

www.biomaze.ir

۱۷- در یک دنباله حسابی با جمله عمومی t_n رابطه $t_n = t_{n-2} + 15$ برقرار است. عبارت $t_4^2 - t_5^2$ چند برابر جمله هفتم است؟

۳۵ (۱) ۴۰ (۲) ۴۵ (۳) ۵۰ (۴)

هر تست ماز یک کلاس درس!

- در دنباله‌های حسابی با جمله اول t_1 و قدرنسبت d می‌دانیم که:

$$1) t_n = t_1 + (n-1)d$$

$$2) t_m - t_n = (m-n)d$$

مثال: اگر در یک دنباله حسابی $t_1 = 5$ و $t_5 - t_1 = 30$ باشد، آن‌گاه t_7 را به دست آورید.

$$t_5 - t_1 = 30 \Rightarrow 4d = 30 \Rightarrow d = 7.5$$

$$t_7 = t_1 + 6d \xrightarrow{d=7.5} t_7 = 5 + 45 = 50$$

با توجه به رابطه $t_n = t_{n-3} + 15$ و خواص دنباله‌های حسابی داریم:

$$t_n = t_{n-3} + 15 \Rightarrow t_n - t_{n-3} = 15 \xrightarrow{t_n - t_{n-3} = 3d} 3d = 15 \Rightarrow d = 5$$

$$\frac{t_9 - t_5}{t_7} = \frac{(t_9 - t_5)(t_9 + t_5)}{t_7(t_9 + t_5)} = \frac{(4d)(2t_7)}{t_7} = 8d = 8 \times 5 = 40$$

از آنجایی که t_7 برای جملات t_5 و t_9 یک واسطه حسابی محسوب می‌شود پس در محاسبات فوق به جای عبارت $(t_9 + t_5)$ ، عبارت $(2t_7)$ را قرار دادیم.

سوالات منتخب

۱- مجموع سه جمله اول یک دنباله حسابی ۴ برابر مجموع سه جمله بعدی آن است. جمله ششم کدام است؟

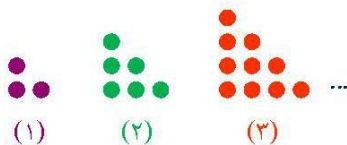
- ۱) -۱ ۲) ۱ ۳) صفر ✓ ۴) ۲

۲- در یک دنباله حسابی با جمله عمومی t_n اگر $t_5 = 3$ و $t_6 - t_4 = 48$ باشد، قدرنسبت دنباله کدام است؟

- ۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ✓ ۴) ۶

گروه آموزشی ماز

18- با توجه به الگوی مقابل، چه تعدادی از اشکال، کمتر از ۳۰۰ دایره دارند؟



- ۱) ۲۱
۲) ۲۲
۳) ۲۳
۴) ۲۴

هر تست ماز یک کلاس درس!

- دنباله درجه دوم، دنباله‌ای است که تفاضل جملات آن تشکیل دنباله حسابی می‌دهند و جمله عمومی آن به صورت $a_n = an^2 + bn + c$ است. برای بدست آوردن ضرایب a و b و c به صورت زیر عمل می‌کنیم:

اگر دنباله زیر درجه دوم باشد، داریم:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{d}{2} \\ c = a_1 - (x-d) \end{cases}$$

برای به دست آوردن ضریب b ، بعد از مشخص شدن ضرایب a و c کافی است از یکی از جملات دنباله استفاده کرده و b را بدست آوریم. همچنین می‌توانیم ضریب a را به صورت فوق بدست آوریم و با استفاده از دو جمله دنباله و حل دستگاه دو معادله دو مجهول، ضرایب b و c را بدست آوریم.

دنباله مربوط به تعداد دایره‌ها، یک دنباله درجه دوم است.

$$\begin{aligned} 3, 6, 10, 15, \dots &\Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{2} = \frac{1}{2} \\ c = 3 - (3-1) = 1 \end{cases} \Rightarrow t_n = \frac{1}{2}n^2 + bn + 1 \\ &\quad \begin{array}{c} \text{+3} \quad \text{+4} \quad \text{+5} \\ \text{+1} \quad \text{+1} \end{array} \end{aligned}$$

$$t_1 = 3 \Rightarrow \frac{1}{2}(1)^2 + b(1) + 1 = 3 \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

از طرفی داریم:

پس $t_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1$ است. حال برای آن که مشخص کنیم چه تعدادی از اشکال کمتر از ۳۰۰ دایره دارند، جمله عمومی را کمتر از ۳۰۰ قرار می‌دهیم:

$$t_n < 300 \Rightarrow \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1 < 300 \Rightarrow n^2 + 3n + 2 < 600 \Rightarrow$$

$$n^2 + 3n - 598 < 0 \Rightarrow (n+26)(n-23) < 0 \Rightarrow -26 < n < 23$$

$$\xrightarrow{n \geq 1} 1 \leq n \leq 22$$

پس ۲۲ شکل کمتر از ۳۰۰ دایره دارند.

سوالات منتخب:

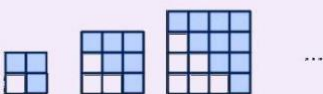
۱- در الگوی مقابل تعداد مربع‌ها در کدام شکل برابر ۱۰۵ است؟



- (۲) دوازدهم
(۴) هفدهم

- (۱) چهاردهم
(۳) پانزدهم

۲- با توجه به الگوی مقابل در شکلی که تعداد مربع‌های سفید برابر ۶۶ است، تعداد مربع‌های رنگی کدام است؟



- (۲) ۶۸
(۴) ۷۸

- (۱) ۶۶
(۳) ۷۷

۱۹- در یک کلاس ۶۰ نفری، ۳۶ نفر به رشته ریاضی و ۵۲ نفر به رشته تجربی علاقه‌مند هستند. اگر ۱۶ نفر به هیچ رشته‌ای علاقه‌مند نباشند، چند نفر فقط به رشته تجربی علاقه‌مند هستند؟

(۴) ۲۰

(۳) ۱۶

(۲) ۱۲

(۱) ۸

(ریاضی ۱ - ساده)

پاسخ: گزینه ۱

نکته

$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(B - A) + n(A \cap B)$$

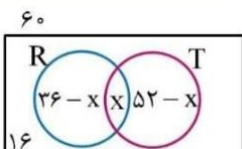
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B - A)$$

$$n(A \cup B) = n(B) + n(A - B)$$

علاوه بر روابط فوق، می‌توانیم از نمودار ون کمک بگیریم.

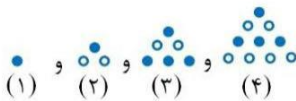
بهتر است از نمودار کمک بگیریم.



$$16 + (36 - x) + x + (52 - x) = 60 \Rightarrow 104 - x = 60 \Rightarrow x = 44$$

فقط به رشته تجربی علاقه‌مند باشند: $52 - x = 8$ نفر

20 - مطابق الگوی مقابل، اختلاف تعداد نقاط توپر و توخالی در شکل دهم کدام است؟



(۱) ۵
(۲) ۱۱

(۳) ۱۰
(۴) ۹

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۱ - متوسط)

تعداد کل دایره‌های توپر و توخالی $n = \frac{n^2 + n}{2}$ است. $1+2+3+\dots+n$

در شکل دهم تعداد کل $1+2+3+\dots+10 = \frac{1}{2}(10 \cdot 10 + 10) = 55$ است.

در شکل دهم:

$$\begin{cases} \text{توپر} = 1+2+5+7+9 = 25 \\ \text{خالی} = 2+4+6+8+10 = 30 \end{cases}$$

اختلاف آن‌ها ۵ تاست.

21 - اگر $0, 5, 14, \dots$ جملات ابتدایی یک الگوی درجه ۲ باشد، اولین جمله سه رقمی این دنباله، کدام است؟

(۱) ۱۱۹

(۲) ۱۳۷

(۳) ۱۰۹

(۴) ۱۱۳

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۱ - متوسط)

نکته: در الگوی درجه ۲ جمله عمومی، به صورت $t_n = an^2 + bn + c$ است. با داشتن سه جمله از آن و حل دستگاه، جمله عمومی آن بدست می‌آید.

$$a_n = \alpha n^2 + \beta n + \gamma \Rightarrow \begin{cases} n=1 & \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ n=2 & 4\alpha + 2\beta + \gamma = 5 \\ n=3 & 9\alpha + 3\beta + \gamma = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha + \beta = 5 \\ 5\alpha + \beta = 9 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 2, \beta = -1, \gamma = -1 \Rightarrow a_n = 2n^2 - n - 1$$

$$n=8 \Rightarrow a_8 = 128 - 9 = 119$$

گروه آموزشی ماز

22 - بین جملات سوم و ششم دنباله هندسی $a_n = 12 \times 2^{1-n}$ سه واسطه حسابی قرار داده‌ایم. جمع این واسطه‌ها چه عددی است؟

(۱) $\frac{9}{8}$

(۲) $\frac{83}{16}$

(۳) $\frac{93}{16}$

(۴) $\frac{81}{16}$

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۱ - متوسط)

نکته: اگر قرار باشد بین دو عدد a و b تعداد n واسطه حسابی درجه کنیم آن‌گاه قدرنسبت این دنباله $d = \frac{b-a}{n+1}$ خواهد شد.

جملات سوم و ششم دنباله هندسی را معلوم می‌کنیم.

$$a_3 = 12 \times 2^{1-3} = \frac{12}{4} = 3$$

$$a_6 = 12 \times 2^{1-6} = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$$

$$d = \frac{3 - \frac{3}{8}}{4} = \frac{21}{32}$$

بین ۳ و $\frac{3}{8}$ ، سه واسطه حسابی قرار می‌دهیم:

$$3 \text{ و } \frac{3}{8} \times \frac{21}{32} \text{ و } \frac{3}{8} + 2 \times \frac{21}{32} \text{ و } \frac{3}{8} + 3 \times \frac{21}{32} \text{ و } \frac{3}{8} + 4 \times \frac{21}{32}$$

پس:

جمع سه واسطه حسابی:

$$S = \frac{3}{8} + \frac{21}{32} + \frac{3}{8} + 2 \times \frac{21}{32} + \frac{3}{8} + 3 \times \frac{21}{32}$$

$$S = \frac{9}{8} + \frac{21}{32}(1+2+3) = \frac{9}{8} + \frac{63}{16} = \frac{81}{16}$$

23- اگر $(A-B) \cup B = (B \cap A') \cup x$ ، مجموعه x کدام می تواند باشد؟

- (۱) A' (۲) A (۳) $B' \cup A$ (۴) $B' \cap A$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۱ - صفحه ۸ تا ۱۱ - متوسط)

پاسخ تشریحی:

اگر عبارت سمت چپ را ساده کنیم به کمک نمودار ون حاصل $(A-B) \cup B$ همان $A \cup B$ خواهد شد، پس باید عبارت سمت راست هم $A \cup B$ شود، پس:

$$(B \cap A') \cup x = A \cup B \Rightarrow (B-A) \cup x = A \cup B$$

پس x جوابهای بی شماری می تواند داشته باشد از جمله A ، پس $x = A$ می تواند جواب باشد.

گروه آموزشی ماز

24- اگر $A \subset B'$ کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) $A-B = A$ (۲) $B-A = B$ (۳) $A \cup B = B'$ (۴) $A \cap B = \emptyset$

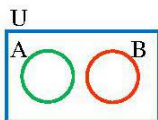
پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۱ - صفحه ۸ تا ۱۱ - متوسط)

نکته:

$$A \subset B \Rightarrow A \cup B = B, A \cap B = A$$

$$A \subset B' \Rightarrow A \cap B' = A \Rightarrow A-B = A$$

پاسخ تشریحی:



چون $A \subset B'$ ، پس می توانیم A و B را جدا از هم به شکل مقابل در نظر بگیریم.

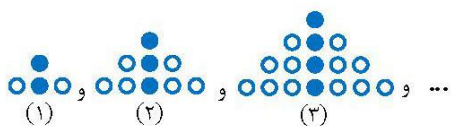
$$A-B = A, B-A = B, A \cap B = \emptyset$$

پس داریم:

لذا تنها گزینه نادرست، گزینه ۳ است.

گروه آموزشی ماز

25- با توجه به الگوی مقابل، در چندمین شکل، اختلاف نقاط توپر و توخالی برابر ۱۲۰ خواهد شد؟



- (۱) ۱۰
(۲) ۱۱
(۳) ۱۲
(۴) ۱۳

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۱ - صفحه ۱۴ و ۱۵ - متوسط)

پاسخ تشریحی:

اگر به الگوی مناسب برسیم، آن گاه:

شماره مرحله	۱	۲	۳	n
نقاط توپر	۱	۴	۹	n^2
نقاط توخالی	۰	۳	۶	$n(n-1)$

$$n^2 - n(n-1) = 120 \Rightarrow n^2 - n^2 + n = 120 \Rightarrow n = 120$$

گروه آموزشی ماز

26- در الگوی درجه دوم با جمله عمومی a_n رابطه $a_{n+1} - a_n = 4n+1$ برقرار است. اگر جمله اول الگو ۲ باشد، جمله دهم آن چه عددی است؟

- (۱) ۱۸۹ (۲) ۲۰۱ (۳) ۱۹۱ (۴) ۱۹۸

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۱ - صفحه ۱۹ - متوسط)

پاسخ تشریحی:

چون a_n الگوی درجه ۲ است، پس اختلاف هر دو جمله متوالی آن از درجه اول است.

$$a_2 - a_1 = 5 \Rightarrow a_2 = 7$$

$$a_3 - a_2 = 9 \Rightarrow a_3 = 16$$

اگر فرض کنیم: $a_n = an^2 + bn + c$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 = a + b + c \\ 7 = 4a + 2b + c \\ 16 = 9a + 3b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta = 3a + b \\ 9 = \Delta a + b \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = -1, c = 1$$

$$a_n = 2n^2 - n + 1 \Rightarrow a_{10} = 2 \cdot 100 - 10 + 1 = 191$$

گروه آموزشی ماز

27 - هرگاه جمله نوزدهم یک دنباله حسابی ۵ برابر جمله پنجم آن باشد، جمع جملات هفتم و هشتم و نهم چند برابر جمله سوم آن است؟ ($a_1 \neq 0$)

۹ (۴)

۱۱ (۳)

۱۷ (۲)

۱۳ (۱)

(ریاضی ۱ - صفحه ۲۱ تا ۲۴ - متوسط)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی:

در دنباله حسابی $a_n = a_1 + (n-1)d$ پس: $a_{19} = 5a_5$

$$a_1 + 18d = 5a_1 + 20d \Rightarrow 4a_1 + 2d = 0 \Rightarrow d = -2a_1$$

حال می‌رویم سراغ حکم:

$$\frac{a_7 + a_8 + a_9}{a_3} = \frac{a_1 + 6d + a_1 + 7d + a_1 + 8d}{a_1 + 2d} = \frac{3a_1 + 21d}{a_1 + 2(-2a_1)} = \frac{3a_1 + 21(-2a_1)}{-3a_1} = \frac{-39a_1}{-3a_1} = 13$$

گروه آموزشی ماز

28 - اعداد $m, 4, n, 9, \dots$ جملات ابتدایی یک دنباله هندسی با جملات مثبت هستند. واسطه حسابی بین جمله هشتم و نهم آن چه عددی است؟

$$\frac{5}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^8 \quad (۴)$$

$$\frac{5}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^8 \quad (۳)$$

$$\frac{10}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^7 \quad (۲)$$

$$\frac{10}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^8 \quad (۱)$$

(ریاضی ۱ - صفحه ۲۱ تا ۲۷ - متوسط)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی:

فرض کنیم قدرنسبت آن x باشد:

$$a_2 = 4 \Rightarrow a_4 = a_2 \times x^2$$

$$a_4 = 9$$

$$9 = 4 \times x^2 \Rightarrow x = \pm \frac{3}{2} \quad x > 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

پس جملات آن به صورت $\frac{8}{3}, 4, 6, 9, \dots$ هستند.

$$a_8 = a_1 x^7 = \frac{8}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^7$$

$$a_9 = a_1 x^8 = \frac{8}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^8$$

به این ترتیب:

$$a_8 \text{ و } a_9 \text{ واسطه حسابی بین } a_8 \text{ و } a_9 = \frac{a_8 + a_9}{2} = \frac{\frac{8}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^7 + \frac{8}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^8 \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{8}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^7 \left(1 + \frac{3}{2}\right)}{2} = \frac{4}{3} \times \frac{5}{2} \times \left(\frac{3}{2}\right)^7 = \frac{10}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^7$$

گروه آموزشی ماز

29 - دنباله‌های $a_n = 5n + 3$ و $b_n = a\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ مفروضند. اگر جملات بیست و پنجم هر دو دنباله با هم برابر باشند، جمله چندم دنباله b_n برابر یک

است؟

۳۲ (۴)

۳۱ (۳)

۳۰ (۲)

۲۹ (۱)



پاسخ تشریحی:

$$\begin{aligned}
 a_{25} &= 5 \times 25 + 3 = 128 \\
 b_{25} &= a \times 2^{-24} \Rightarrow a \times 2^{-24} = 2^7 \Rightarrow a = 2^{31} \\
 \Rightarrow b_n &= 2^{31} \times 2^{1-n} = 2^{32-n} \\
 b_n &= 1 \Rightarrow n = 32 \Rightarrow b_{32} = 1
 \end{aligned}$$

گروه آموزشی ماز

30 - اعداد جملات دنباله حسابی $a_n = 4n - 1$ را به صورت $\{a_1\}, \{a_2, a_3\}, \{a_4, a_5, a_6\}, \dots$ دسته‌بندی کرده‌ایم. اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین اعداد واقع در دسته دوازدهم چه عددی است؟

۴۴ (۴)

۴۸ (۳)

۴۶ (۲)

۵۲ (۱)



پاسخ تشریحی:

توجه کنید که شماره جملات آخر هر دسته به صورت دنباله $1, 3, 6, 10, 15, \dots$ می‌باشد و می‌دانیم اعداد $1, 3, 6, 10, 15, \dots$ مثلثی با قانون $\frac{n(n+1)}{2}$ هستند، پس:

$$\text{دسته دوازدهم} = \{a_{67}, a_{68}, \dots, a_{78}\}$$

$$n = 11 \Rightarrow \frac{11 \times 12}{2} = 66 = \text{بزرگ‌ترین شماره دسته یازدهم} \quad n = 12 \Rightarrow \frac{12 \times 13}{2} = 78 = \text{بزرگ‌ترین شماره دسته دوازدهم}$$

$$\text{اختلاف} = a_{78} - a_{67} = (4 \times 78 - 1) - (4 \times 67 - 1) = 4(78 - 67) = 4 \times 11 = 44$$

31- اشتراک دو بازه $[a-1, 3]$ و $(-2, 2)$ یک بازه نیم باز است. حدود a کدام است؟

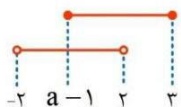
- (۱) $[-1, 3]$ (۲) $(-1, 3)$ (۳) $(-1, 3]$ (۴) $[-1, 3]$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۱ - صفحات ۲ و ۵ - ساده)

بازدها:



پاسخ تشریحی:



برای اینکه $(-2, 2) \cap [a-1, 3]$ یک بازه نیم باز شود، باید $-2 < a-1 < 2$ باشد، بنابراین: $-1 < a < 3$

گروه آموزشی ماز

32- A و B دو مجموعه جدا از هم و زیرمجموعه مجموعه مرجع U می باشند. اگر $A-B$ متناهی و $A \cup B$ نامتناهی باشد، کدام مجموعه همواره نامتناهی است؟

- (۱) $B-A'$ (۲) $A'-B'$ (۳) $A' \cap B'$ (۴) $A \cup B'$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۱ - صفحه ۷ - متوسط)

مجموعه:

- هرگاه U مجموعه مرجع باشد و $A \subseteq U$ ، آنگاه مجموعه $U-A$ را متمم A می نامیم و آن را با نماد A' نشان می دهیم. به عبارت دیگر A' شامل عضوهای U است که در A نیستند.
- به هر دو مجموعه مثل A و B که فاقد عضو مشترک باشند، دو مجموعه جدا از هم یا مجزا می گوئیم.
- دو مجموعه متمم همواره جدا از هم هستند و نه برعکس.
- اگر مجموعه مرجع نامتناهی باشد:
- متمم یک مجموعه متناهی، نامتناهی است.
- متمم یک مجموعه نامتناهی می تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

$$U = \mathbb{N}, A = \{1, 2\} \Rightarrow A' = \{3, 4, \dots\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U = \mathbb{N}, A = \{3, 4, \dots\} \rightarrow A' = \{1, 2\} \\ U = \mathbb{Z}, A = \{3, 4, \dots\} \rightarrow A' = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2\} \end{array} \right.$$

پاسخ تشریحی:

- A و B جدا از هم می باشند، بنابراین $A-B = A$ است. نتیجه می گیریم A متناهی است.
- A نامتناهی می باشد، چون A متناهی است نتیجه می شود B نامتناهی می باشد.
- چون A و B جدا از هم هستند $B \subseteq A'$ است. در نتیجه: $A'-B' = A' \cap B = B$
- این مجموعه نامتناهی است.

بررسی سایر گزینه ها:

۱ متناهی $B'-A' = B' \cap A = A$

۲ اگر A و B را دو مجموعه متمم در نظر بگیریم $B = A'$ بوده و $A' \cap B' = B \cap B' = \emptyset$ خواهد بود که متناهی است.

۳ در حالتی که A و B متمم باشند $A \cup B' = A \cup A = A$

سوالانت منتخب:

اگر مجموعه های $A = \left\{ \frac{1}{x} \mid x \in \mathbb{N} \right\}$ و $B = \left\{ \frac{x}{\lambda} \mid x \in \mathbb{N} \right\}$ مفروض باشند، کدام یک از مجموعه های زیر متناهی است؟

- (۱) $A-B$ (۲) $B-A$ (۳) $A \cap B$ (۴) $A \cup B$

گروه آموزشی ماز

33- در یک جمع ۳۵ نفره، ۲۰ نفر عضو گروه A و ۹ نفر فقط عضو گروه B هستند. تعداد افرادی که عضو هر دو گروه هستند، با تعداد افرادی که عضو هیچ گروهی نیستند برابر است. اگر ۴ نفر از اعضای A انصراف دهند تعداد افرادی که عضو هیچ گروهی نیستند دو برابر تعداد افرادی می‌شود که عضو هر دو گروه می‌باشند. در حالت جدید چند نفر فقط عضو یک گروه هستند؟

(۱) ۲۰ (۲) ۲۱ (۳) ۲۲ (۴) ۲۳

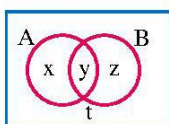
پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۱ - صفحات ۱۰ و ۱۳ - دشوار)

نکته مهم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

پاسخ تشریحی:

نمودار مقابل را در نظر می‌گیریم.
می‌دانیم:



$$x + y = 20, z = 9, x + y + z + t = 35$$

$$20 + 9 + t = 35 \rightarrow t = 6$$

$$x + y = 20 \rightarrow x = 20 - 6 = 14$$

از طرفی $y = t = 6$ می‌باشد. بنابراین:

پس از انصراف ۴ نفر از A، به اندازه n از y و به اندازه ۴ - n از x کاسته شده و به t اضافه می‌گردد. در نتیجه:

$$t + 4 - n = 2(y - n) \rightarrow 6 + 4 - n = 2(6 - n) \rightarrow n = 2$$

یعنی ۲ نفر از افرادی که فقط عضو A هستند و ۲ نفر از افرادی که عضو هر دو گروه A و B هستند انصراف داده‌اند فقط دقت کنید که آن دو نفری که عضو هر دو گروه بوده و از گروه A انصراف داده‌اند، در حالت جدید فقط عضو گروه B خواهند بود، بنابراین در حالت جدید A - B دارای $x - 2 = 12$ عضو و B - A دارای ۱۱ عضو است که مجموع اعضای آن‌ها برابر $11 + 12 = 23$ می‌باشد.

سوالات منتخب:

مجموعه A دارای ۳۶ عضو و مجموعه B دارای ۲۸ عضو است. اشتراک آن‌ها ۱۵ عضو دارد. اگر ۱۶ عضو از مجموعه A حذف شود، از اشتراک آن‌ها ۹ عضو حذف می‌شود. تعداد عضوهای اجتماع مجموعه جدید با مجموعه B، کدام است؟

(۱) ۲۳ (۲) ۴۱ (۳) ۴۲ ✓ (۴) ۴۵

گروه آموزشی ماز

34- در یک دنباله با الگوی $a_n = n - 5[\frac{n}{5}]$ ، مجموع ۲۲ جمله اول کدام است؟

(۱) ۴۱ (۲) ۴۳ (۳) ۶۱ (۴) ۶۳

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۱ - صفحات ۱۹ و ۲۰ - متوسط)

پاسخ تشریحی:

می‌دانیم: $a_n = n - 5[\frac{n}{5}] = 5(\frac{n}{5} - [\frac{n}{5}])$ ، متناوب بوده و دوره تناوب آن ۵ است.

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4, a_5 = 0, a_6 = 1, a_7 = 2, \dots$$

در نتیجه مجموع هر ۵ جمله برابر $1 + 2 + 3 + 4 + 0 = 10$ می‌باشد. بنابراین مجموع ۲۰ جمله اول برابر $4 \times 10 = 40$ می‌شود.

$$a_{21} = a_1 = 1 \quad a_{22} = a_2 = 2 \Rightarrow S_{22} = S_{21} + a_{21} + a_{22} = 43$$

سوالات منتخب:

$$a_n = \begin{cases} k & n = 3k \\ -2k + 4 & n = 3k + 1 \\ [\frac{n}{k+2}] + a & n = 3k + 2 \end{cases}$$

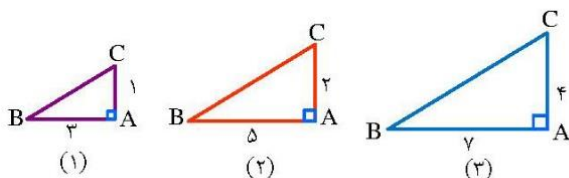
دنباله a_n به ازای اعداد حسابی n مفروض است. اگر مجموع ۱۰ جمله اول این دنباله ۱۹ باشد. حاصل عبارت

$$a_2 + a_5 + a_8 + \dots + a_{29} \text{ (سراسری ۱۴۰۰)}$$

(۱) -۲ ✓ (۲) صفر (۳) ۳ (۴) ۴

گروه آموزشی ماز

35- در الگوی زیر در هر شکل طول AB نسبت به شکل قبل، دو واحد افزایش یافته و طول AC دو برابر می‌شود. در شکل دهم $\tan \hat{B}$ کدام است؟



$$\frac{512}{21} \quad (1)$$

$$\frac{1024}{21} \quad (2)$$

$$\frac{512}{23} \quad (3)$$

$$\frac{1024}{23} \quad (4)$$

(ریاضی ۱ - صفحات ۲۲ و ۲۵ - ساده)

پاسخ: گزینه ۱

دنباله حسابی:

دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله قبل از خودش به دست می‌آید، یک دنباله حسابی نامیده می‌شود و به آن عدد ثابت قدرنسبت دنباله می‌گویند.
- دنباله حسابی همان الگوی خطی است.

$$t_1 = a$$

$$t_2 = t_1 + d = a + d$$

$$t_3 = t_2 + d = a + 2d$$

⋮

$$t_n = t_{n-1} + d = a + (n-1)d$$

دنباله هندسی:

دنباله‌ای است که در آن هر جمله (به جز جمله اول) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت و غیرصفر به دست می‌آید. این عدد را قدرنسبت دنباله می‌نامیم.
جمله اول هم باید غیرصفر باشد.

$$t_1 = a$$

$$t_2 = t_1 \cdot r = ar$$

$$t_3 = t_2 \cdot r = ar^2$$

⋮

$$t_n = t_{n-1} \cdot r = ar^{n-1}$$

پاسخ تشریحی:

$$a_n = 3 + (n-1) \times 2 = 2n + 1$$

$$b_n = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

دنباله طول ضلع AB یک دنباله حسابی با جمله اول ۳ و قدرنسبت ۲ است:

دنباله طول ضلع AC یک دنباله هندسی با جمله اول ۱ و قدرنسبت ۲ است:

$\tan \hat{B}$ در شکل دهم به صورت زیر است:

$$\tan \hat{B} = \frac{b_9}{a_9} = \frac{2^9}{2 \times 10 + 1} = \frac{512}{21}$$

گروه آموزشی ماز

36- در دنباله حسابی با قدرنسبت مثبت، جمله نوزدهم چهار برابر جمله هفتم است. این دنباله چند جمله منفی دارد؟

(۴)

(۳)

(۲)

(۱) صفر

(ریاضی ۱ - صفحات ۲۲ و ۲۴ - متوسط)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی:

$$a_{19} = 4a_7 \Rightarrow a + 18d = 4(a + 6d) \Rightarrow 3a + 6d = 0 \Rightarrow a + 2d = 0 \Rightarrow a_7 = 0$$

جمله سوم دنباله برابر صفر است و چون قدرنسبت دنباله مثبت است نتیجه می‌شود که جملات اول و دوم منفی می‌باشند.

سوالات منتخب:

دنباله حسابی با جمله اول ۶۳ و قدرنسبت (-۴) چند جمله مثبت دارد؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۶ ✓ (۳) ۱۷ (۴) ۱۸

گروه آموزشی ماز

37- در یک دنباله حسابی رابطه $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} = 3$ بین جملات اول تا دهم برقرار است. اگر تفاضل معکوس جملات اول و دهم برابر ۶ باشد، مقدار مثبت قدرنسبت کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) $\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۱ - صفحات ۲۱ و ۲۴ - دشوار)

پاسخ تشریحی:

می دانیم:

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} = \frac{a_2 - a_1}{a_1 a_2} = \frac{d}{a_1 a_2} \Rightarrow \frac{1}{a_1 a_2} = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right)$$

$$\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} = \frac{a_3 - a_2}{a_2 a_3} = \frac{d}{a_2 a_3} \Rightarrow \frac{1}{a_2 a_3} = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \right)$$

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) = 3$$

بنابراین:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) &= 3 \\ \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}} &= 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{d} \times 6 = 3 \Rightarrow d = 2$$

از طرفی:

گروه آموزشی ماز

38- بین دو عدد ۱ و ۲، یازده واسطه هندسی مثبت درج کرده ایم. حاصل ضرب جملات درج شده کدام است؟

- (۱) ۳۲ (۲) $32\sqrt{2}$ (۳) ۶۴ (۴) $64\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۱ - صفحه ۲۶ - ساده)

نکته مهم:

در دنباله هندسی، اگر $m + n = p + q$ ، آن گاه: $t_m t_n = t_p t_q$.

$$t_1 t_9 = t_2 t_8 = t_3 t_7 = t_4 t_6 = t_5^2$$

پاسخ تشریحی:

دنباله حاصل به صورت مقابل است: $1, a_1, a_2, \dots, a_9, 2$

می دانیم:

$$1 \times 2 = a_1 a_9 = a_2 a_8 = \dots = a_5 a_5 \Rightarrow a_5 = \sqrt{2}$$

بنابراین:

$$a_1 a_2 \dots a_9 = \underbrace{(a_1 a_9)}_2 \underbrace{(a_2 a_8)}_2 \dots \underbrace{(a_4 a_6)}_2 a_5 = 2^5 \times \sqrt{2} = 32\sqrt{2}$$

سوالات منتخب:

در یک دنباله هندسی، حاصل ضرب نه جمله اول برابر هشت است. $(a_1 a_2 \dots a_9 = 8)$ در این صورت حاصل ضرب a_2, a_4, a_6, a_8 چقدر است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$ ✓ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) ۴

گروه آموزشی ماز

39- در یک دنباله هندسی جمله نهم هشت برابر جمله ششم است. مجموع شش جمله اول چند برابر مجموع سه جمله اول است؟

(۱) ۸ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۱ - صفحات ۲۵ تا ۲۷ - متوسط)

پایه تشریحی:

$$\frac{a_9}{a_6} = 8 \Rightarrow \frac{aq^8}{aq^5} = 8 \Rightarrow q^3 = 8$$

می دانیم:

$$\frac{S_9}{S_6} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9}{a_1 + a_2 + a_3} = \frac{a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 + aq^6 + aq^7 + aq^8}{a + aq + aq^2} = \frac{a(1+q+q^2) + aq^3(1+q+q^2)}{a(1+q+q^2)}$$

خواهیم داشت:

$$= \frac{\cancel{a(1+q+q^2)}(1+q^3)}{\cancel{a(1+q+q^2)}} = 1+q^3 = 1+8 = 9$$

گروه آموزشی ماز

40- جملات سوم، پنجم، یازدهم و n ام یک دنباله حسابی غیر ثابت جملات متوالی یک دنباله هندسی هستند. n کدام است؟

(۱) ۲۷ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۳۰

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۱ - صفحات ۲۱ و ۲۷ - دشوار)

نکته مهم:

اگر جملات a_m, a_n, a_p از یک دنباله حسابی غیر ثابت، به ترتیب سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند، قدرنسب دنباله هندسی برابر است با: $q = \frac{p-n}{n-m}$

پایه تشریحی:

روش اول:

جملات سوم، پنجم و یازدهم دنباله حسابی جملات متوالی یک دنباله هندسی هستند. بنابراین a_5 واسطه هندسی a_3 و a_{11} است.

$$a_5^2 = a_3 a_{11} \Rightarrow (a + 4d)^2 = (a + 2d)(a + 10d) \Rightarrow a^2 + 8ad + 16d^2 = a^2 + 12ad + 20d^2 \Rightarrow 4ad = -4d^2 \xrightarrow{d \neq 0} a = -d$$

$$q = \frac{a_5}{a_3} = \frac{a + 4d}{a + 2d} = \frac{3d}{d} = 3$$

قدرنسب دنباله هندسی برابر است با:

جملات دنباله هندسی به صورت a_3, a_5, a_{11}, a_n می باشند، بنابراین:

$$\frac{a_n}{a_{11}} = q = 3 \Rightarrow \frac{a + (n-1)d}{a + 10d} = \frac{(n-2)d}{9d} = 3 \Rightarrow n - 2 = 27 \Rightarrow n = 29$$

روش دوم:

$$q = \frac{11-5}{5-3} = \frac{6}{2} = 3$$

ادامه راه حل مانند روش اول است.

سوالات منتخب:

در یک دنباله حسابی با جملات متمایز، جملات سوم، هفتم و نهم می توانند سه جمله متوالی از دنباله ای هندسی باشند، چندمین جمله این دنباله حسابی، صفر است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۱۱ (۴) ۴

گروه آموزشی ماز

41- بین اعداد -13 و 71 بیست واسطه حسابی درج کرده‌ایم. میانگین واسطه‌های اول و آخر کدام است؟

۳۰ (۴)

۲۹ (۳)

۳۱ (۲)

۲۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۱ - صفحه ۲۳ - ساده)

نکته:

اگر بخواهیم بین دو عدد a و b به تعداد m واسطه حسابی درج کنیم، قدرنسبت دنباله حسابی از رابطه $d = \frac{b-a}{m+1}$ به دست می‌آید.

پاسخ تشریحی:

روشی اول:

$$d = \frac{71 - (-13)}{20 + 1} = \frac{84}{21} = 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{واسطه اول: } -13 + 4 = -9 \\ \text{واسطه آخر: } 71 - 4 = 67 \end{cases} \Rightarrow \text{میانگین واسطه‌های اول و آخر} = \frac{67 - 9}{2} = 29$$

روشی دوم:

میانگین واسطه اول و آخر با میانگین داده‌های اول و آخر برابر است (زیرا داده‌ها تشکیل دنباله حسابی می‌دهند).
بنابراین:

$$= \frac{71 - 13}{2} = \frac{58}{2} = 29$$

سوالات منتخب:

بین اعداد 8 و $\frac{81}{2}$ سه واسطه به گونه‌ای درج کرده‌ایم که دنباله هندسی غیریکنوا به وجود آید. کوچک‌ترین واسطه کدام است؟

۱۸ (۴)

۱۲ (۳)

-۱۲ (۲)

۲۷- (۱) ✓

گروه آموزشی ماز

42- اگر دنباله $2a+1, 4a-3, 3a-b, \dots$ هم دنباله‌ای حسابی و هم دنباله‌ای هندسی باشد، جمله دهم دنباله $\frac{5}{2}a+b, \frac{1}{2}a+b, \dots$ کدام است؟

$\frac{67}{2}$ (۴)

$\frac{63}{2}$ (۳)

$\frac{61}{2}$ (۲)

$\frac{65}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۱ - صفحه ۲۳ تا ۲۷ - متوسط)

نکته:

اگر دنباله‌ای هم حسابی و هم هندسی باشد، در این صورت این دنباله، باید دنباله ثابت باشد یعنی تمام جملات دنباله باید با هم برابر باشند.

پاسخ تشریحی:

چون دنباله $2a+1, 4a-3, 3a-b, \dots$ هم دنباله‌ای حسابی و هم دنباله‌ای هندسی است، پس داریم:

$$\begin{cases} 2a+1 = 4a-3 \rightarrow 2a = 4 \rightarrow a = 2 \\ 4a-3 = 3a-b \rightarrow a+b = 3 \rightarrow 2+b = 3 \Rightarrow b = 1 \end{cases}$$

دنباله مطلوب: $a^2 - 5, 2b + \frac{1}{2}a + b, \dots$

دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت $d = \frac{7}{2} \Rightarrow -1, \frac{5}{2}, 6, \dots$

$$a_{10} = a_1 + 9d = -1 + 9\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{61}{2}$$

سوالات منتخب:

مجموع سه جمله متوالی دنباله‌ای حسابی برابر ۱۵ و حاصل ضرب آن‌ها برابر ۴۵ است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

± 4 (۴) ✓

± 3 (۳)

± 2 (۲)

$\pm \frac{1}{2}$ (۱)

43- اگر $\mathbb{R} - \{a\} = (-\infty, 2b-1) \cup (-b+5, +\infty)$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

- (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 5

پاسخ: گزینه 4 (ریاضی 1 - صفحات 3 تا 5 و 7 - ساده)

پاسخ تشریحی:

باید $a = -b + 5 = 2b - 1$ باشد، پس: $2b - 1 = -b + 5 \Rightarrow 3b = 6 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow a + b = 5$

گروه آموزشی ماز

44- در دنباله درجه دوم $3, 5, 9, 15, 23, \dots$ اختلاف جمله‌های نوزدهم و بیستم کدام است؟

- (1) 16 (2) 28 (3) 36 (4) 38

پاسخ: گزینه 4 (ریاضی 1 - صفحات 18 تا 20 - متوسط)

پاسخ تشریحی:

در دنباله درجه دوم، اختلاف جملات یک دنباله حسابی می‌سازند، پس:

$$3, 5, 9, 15, 23, \dots \Rightarrow t_{19} = t_1 + 18d \Rightarrow t_{19} = 3 + 18 \times 2 = 39$$

$$\begin{array}{ccccccc} 3 & 5 & 9 & 15 & 23 & & \\ +2 & +4 & +6 & +8 & & & \end{array}$$

گروه آموزشی ماز

45- در دنباله حسابی $7, 14, 21, \dots, 84$ مجموع جملات کدام است؟

- (1) 456 (2) 486 (3) 546 (4) 564

پاسخ: گزینه 3 (ریاضی 1 - صفحات 21 تا 24 - ساده)

پاسخ تشریحی:

می‌دانیم $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ است، پس:

$$7 + 14 + 21 + \dots + 84 = 7(1 + 2 + 3 + \dots + 12) = 7 \times \frac{12 \times 13}{2} = 7 \times 78 = 546$$

گروه آموزشی ماز

46- در یک دنباله هندسی، مجموع سه جمله اول برابر 16 و مجموع سه جمله بعدی برابر 54 است. قدرنسبت دنباله کدام است؟

- (1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (2) $\frac{4}{3}$ (3) $\frac{3}{4}$ (4) $\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه 4 (ریاضی 1 - صفحات 25 تا 27 - متوسط)

پاسخ تشریحی:

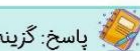
مجموع n جمله دوم دنباله هندسی، r^n برابر مجموع n جمله اول آن است. پس:

$$r^3 = \frac{54}{16} = \frac{27}{8} \Rightarrow r = \frac{3}{2}$$

47- سه عدد که حاصل ضرب آن‌ها ۱۵ است با هم تشکیل دنباله حسابی داده‌اند. اگر ۲ واحد از عدد اول کم کرده و به عدد سوم اضافه کنیم به ۳ جمله متوالی یک دنباله هندسی تبدیل می‌شوند. جمله وسط دنباله‌ها کدام است؟

- (۱) ۲/۵ (۲) ۲ (۳) ۳/۵ (۴) ۳

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۱ - صفحات ۲۱ تا ۲۷ - متوسط)



پاسخ تشریحی:

۳ عدد دنباله حسابی $a-d, a, a+d \Rightarrow a-d, a, a+d$

$$3 \Rightarrow a-d-2, a, a+d+2 \Rightarrow a^2 = (a-d-2)(a+d+2) \Rightarrow a^2 = a^2 - (d+2)^2 \Rightarrow d+2=0 \Rightarrow d=-2$$

۳ عدد دنباله حسابی $3 \Rightarrow a+2, a, a-2 \Rightarrow (a+2)a(a-2) = 15$

$$\Rightarrow a^3 - 4a = 15 \xrightarrow{\text{گزینه‌ها}} a = 3 \quad (\text{توجه کنید که دنباله ثابت، هندسی نیز محسوب می‌شود.})$$

گروه آموزشی ماز

48- x و y اعداد صحیح نامنفی هستند. مجموعه $A = \left\{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{W}, \frac{(\frac{1}{9})^x}{3} \geq 27^{y-2} \right\}$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) ۵

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۱ - صفحات ۲ و ۳ - متوسط)



پاسخ تشریحی:

$$\frac{(\frac{1}{9})^x}{3} \geq 27^{y-2} \Rightarrow \frac{1}{3}(\frac{1}{9})^x \geq 3^{2(y-2)} \Rightarrow \frac{1}{3}(\frac{1}{3})^{2x} \geq 3^{2y-4} \Rightarrow (\frac{1}{3})^{2x+1} \geq (\frac{1}{3})^{-2y+4}$$

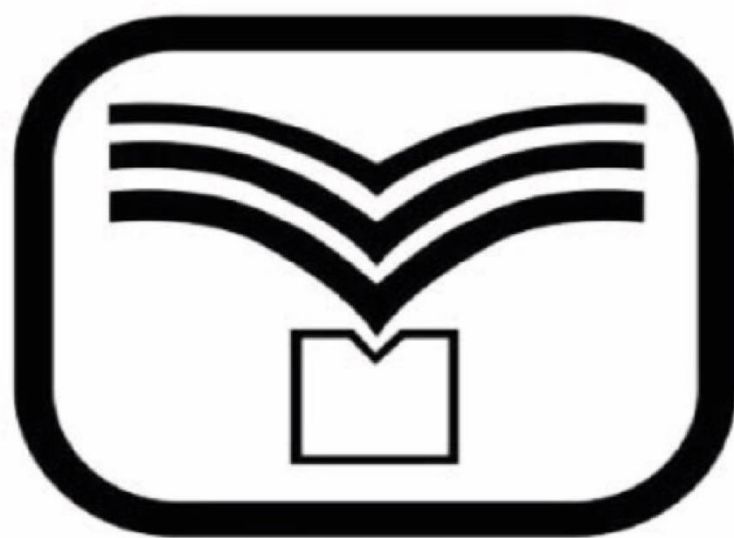
$$\xrightarrow{-\frac{1}{3} < 1} 2x+1 \leq -2y+4 \Rightarrow 2x+2y \leq 3$$

$$x=0 \rightarrow y=0, 1$$

$$x=1 \rightarrow y=0, 1 \Rightarrow A = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (2,0)\}$$

$$x=2 \rightarrow y=0$$

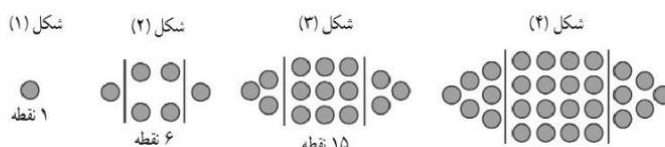
گروه آموزشی ماز



شرکت تعاونی خدمات آموزشی کارکنان
سازمان سنجش آموزش کشور

۱. گزینه ۱ درست است.

شکل زیر را در نظر بگیرید.



جمله عمومی این دنباله $a_n = n^2 + (n-1)n$ یا $a_n = n(2n-1)$ و جمله ۹۷ ام برابر است با:

$$a_{97} = 97 \times (2 \times 97 - 1) = 18721$$

۲. گزینه ۳ درست است.

چون Z و Y و X دنباله حسابی، پس $X+Z=2Y$ و از طرفی $2Y+Y=18$ ، در نتیجه $Y=6$ و $Z=12-X$ است. $(X > Z)$

$$X^2 = 48^2 + Z^2 \Rightarrow X^2 = 48^2 + (12-X)^2 = 2304 + 144 - 24X + X^2$$

$$\Rightarrow 240X = 16704 \Rightarrow X = \frac{16704}{240} = 69.6$$

۳- گزینه ۱ درست است.

جملات a_4, a_6, \dots, a_{12} دنباله حسابی با قدر نسبت $\frac{3}{4}$ است. $a_{12} = \frac{1}{2} + 4(\frac{3}{4}) = 3.5$

۴- گزینه ۴ درست است.

$$aq^2 \times aq^3 = 2aq \times aq^6 \Rightarrow q^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow q = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$aq^9 = aq^4(q^5) = 1(-\frac{\sqrt{2}}{2})^5 = -\frac{\sqrt{2}}{8}$$

۵- گزینه ۲ درست است.

$$\begin{cases} a + (n-1)d = m \\ a + (m-1)d = n \end{cases} \Rightarrow d = -1, a = m + n - 1 \Rightarrow a_p = m + n - 1 + (p-1)(-1)$$

$$a_p = m + n - p$$

۶- گزینه ۴ درست است.

$$1 \times 2, 2 \times 3, 3 \times 4, 4 \times 5, \dots \Rightarrow a_n = n(n+1)$$

$$a_{12} = 12 \times 13 = 156 \text{ پس}$$

۷- گزینه ۱ درست است.

$$\frac{a(1-q^4)}{1-q} = \frac{5}{4} \times \frac{a(1-q^2)}{1-q} \Rightarrow 1+q^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow q^2 = \frac{1}{4}$$

$$aq^6 = a(\frac{1}{4})^3 = \frac{1}{8}a \text{ پس}$$

۸. گزینه ۳ درست است.

$$0/135 + 0/000135 + 0/000000135 + \dots$$

$$S = \frac{0/135}{1 - 0/001} = \frac{135}{999} = \frac{5}{37}$$

دنباله حاصل یک تصاعد هندسی نزولی نامحدود است.

۹. گزینه ۴ درست است.

$$\text{به فرض } n(A \cup B) = 42 - 4 = 38 \text{ می دانیم}$$

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) = 25 + 21 - 38 = 8$$

۱۰. گزینه ۲ درست است.

$$A = \{1, 3, 5, \dots, 99\} \Rightarrow B = \{5, 15, 25, \dots, 95\}$$

سپس B، ۱۰ عضو دارد.

۱۱. گزینه ۲ درست است.

$$aq = a - 2, aq^2 = 5a - 12 \Rightarrow (a - 2)^2 = 5a^2 - 12a \Rightarrow$$

$$4a^2 - 4a - 4 = 0 \Rightarrow a^2 - 2a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$a = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow q_1 = \frac{a - 2}{a} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = (\sqrt{2} - 1)^2$$

$$a = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow q_2 = \frac{-1 - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = (\sqrt{2} + 1)^2 \Rightarrow q_1 + q_2 = 6$$

۱۲. گزینه ۱ درست است.

$$2(x^2 - 5) = x + 2 + 6x + 3 \Rightarrow 2x^2 - 7x - 15 = 0 \Rightarrow x = 5, -\frac{3}{2}$$

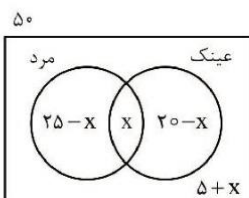
$$7, 20, 33 \Rightarrow d = 13 \Rightarrow a_{27} = 7 + 26 \times 13 = 345$$

$$\frac{1}{2}, -\frac{11}{4}, -6 \Rightarrow d = -\frac{13}{4} \Rightarrow a_{27} = \frac{1}{2} + 26(-\frac{13}{4}) = -84$$

۱۳- گزینه ۱ درست است.

$$\begin{cases} a + a + 6d = 22 \\ 2a + a + 7d = 27 \end{cases} \Rightarrow a = 2, d = 3 \Rightarrow a_9 = 26$$

۱۴- گزینه ۴ درست است.

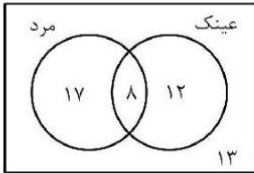


فرض می کنیم X نفر از مردان، عینک دارند، پس نمودار ون به صورت زیر است:

چون ۳۳ نفر زن هستند یا عینک دارند، پس:

$$20 - x + 5 + x + x = 33 \Rightarrow 25 + x = 33 \Rightarrow x = 8$$

بنابراین نمودار ون به صورت زیر است و داریم:



\Rightarrow ۱۷ نفر مرد هستند ولی عینک ندارند.

۱۵- گزینه ۳ درست است.

چون جمله سوم دنباله حسابی صفر است، پس:

$$a_1 + 2d = 0 \Rightarrow a_1 = -2d$$

از طرفی قدر نسبت دنباله هندسی برابر $r = \frac{a_6}{a_4}$ است، بنابراین داریم:

$$r = \frac{a_1 + 5d}{a_1 + 3d} \xrightarrow{a_1 = -2d} r = \frac{3d}{d} = 3$$

حال داریم:

$$r = \frac{n-6}{6-4} \Rightarrow 3 = \frac{n-6}{2} \Rightarrow n-6 = 6 \Rightarrow n = 12$$

۱۶- گزینه ۴ درست است.

روش اول: در دنباله درجه دوم، اختلاف جملات، دنباله حسابی می‌سازند، اگر دنباله اختلاف جملات را با b_n نشان دهیم داریم:

$$1, 5, 12, 22, \dots \Rightarrow b_n = 4 + (n-1) \times 3 \Rightarrow b_n = 3n + 1$$

اختلاف جملات دهم و سیزدهم، مجموع جملات دهم، یازدهم و دوازدهم دنباله b_n است پس:

$$b_{10} + b_{11} + b_{12} = 31 + 34 + 37 = 102$$

روش دوم: می‌توانیم جمله عمومی دنباله درجه دوم را بنویسیم:

$$a_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \Rightarrow \begin{cases} a_{10} = 145 \\ a_{13} = 247 \end{cases} \Rightarrow a_{13} - a_{10} = 247 - 145 = 102$$

۱۷- گزینه ۴ درست است.

شکل بیستم شامل ۲۰ مربع است که به تعداد $1+2+\dots+19$ مربع در شکل‌های قبلی حضور دارند. پس:

$$1+2+\dots+19 = \frac{19 \times 20}{2} = 190$$

بنابراین اعداد حک شده در شکل بیستم از ۱۹۱ تا ۲۱۰ می‌باشند، پس:

$$191+192+\dots+210 = (1+2+\dots+210) - (1+2+\dots+190) =$$

$$\frac{210 \times 211}{2} - \frac{190 \times 191}{2} = 105 \times 211 - 95 \times 191 = 4010$$

توجه کنید که رقم یکان اعداد 105×211 و 95×191 برابر ۵ می‌باشد. پس رقم یکان تفاضل آن‌ها صفر است و در گزینه‌ها فقط رقم یکان ۴۰۱۰ برابر صفر می‌باشد.

۱۸- گزینه ۲ درست است.

جمله عمومی الگو به صورت $a_n = \frac{n(n+1)}{2} + n$ است، پس:

$$a_{16} = \frac{16 \times 17}{2} + 16 = 16 \times \left(\frac{17}{2} + 1\right) = 16 \times \frac{19}{2} = 152$$

۱۹- گزینه ۲ درست است.

$$\begin{array}{c} 2, 4, 8, 14, \dots \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ +2 \quad +4 \quad +6 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ +2 \quad +2 \end{array} \quad t_n = n^2 + bn + c \Rightarrow \begin{cases} 1 + b + c = 2 \\ 4 + 2b + c = 4 \end{cases} \Rightarrow 3 + b = 2 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow c = 2$$

$$t_n = n^2 - n + 2 \Rightarrow t_{17} = 17^2 - 17 + 2 = 274$$

۲۰- گزینه ۳ درست است.

متمم مجموعه $(A' \cap B') \cup C$ برابر است با:

$$[(A' \cap B') \cup C]' = [(A \cup B)' \cup C]' = (A \cup B) \cap C' = [-4, 10] \cap [6, +\infty) = [6, 10]$$

بازه $[6, 10]$ شامل ۵ عدد صحیح است.

۲۱. گزینه ۳ درست است.

نامتناهی $B \Rightarrow$ نامتناهی A و $A \subset B$

$$A \cap B' = A - B = \emptyset, M' = \emptyset \Rightarrow (A - B) - M' = \emptyset \text{ متناهی}$$

۲۲. گزینه ۲ درست است.

$$1^2 - 1, (1^2 - 1) + (2^2 - 1), (1^2 - 1) + (2^2 - 1) + (3^2 - 1), \dots, (1^2 - 1) + \dots + (8^2 - 1)$$

جملات دنباله: ۰, ۳, ۱۱, ..., ۱۹۶

۲۳. گزینه ۱ درست است.

$$2b - 3a = \frac{3a - b + a + b}{2} = 2a \Rightarrow b = \frac{5}{2}a$$

$$\frac{a}{2}, 2a, \frac{7}{2}a, \dots \text{ جملات دنباله حسابی}$$

$$d = \frac{3}{2}a \text{ قدر نسبت دنباله حسابی}$$

$$\frac{5}{2}a - 2, 3a, 6a \text{ جملات دنباله هندسی}$$

$$q = 2 \text{ قدر نسبت دنباله هندسی}$$

$$\frac{3a}{\frac{5}{2}a - 2} = 2 \Rightarrow 3a = 5a - 4 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = 5$$

$$1, 4, 7, \dots \Rightarrow a_{16} = 1 + 15 \times 3 = 46 \text{ دنباله حسابی}$$

$$3, 6, 12, \dots \Rightarrow a_{10} = 3 \times 2^9 = 1536 \text{ دنباله هندسی}$$

$$\frac{a_{10} \text{ هندسی}}{a_{16} \text{ حسابی}} = \frac{1536}{46} = \frac{768}{23}$$

۲۴. گزینه ۱ درست است.

$$\begin{cases} a+b+c=28 \\ b^2=ac \\ 2a=c+b-16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=28 \\ 2a-b-c=-16 \end{cases} \Rightarrow 3a=12 \Rightarrow a=4 \Rightarrow b+c=24$$

$$\begin{cases} b+c=24 \\ b^2=4c \end{cases} \Rightarrow b^2-4b-96=0 \Rightarrow (b-8)(b+12)=0 \Rightarrow \begin{cases} b=8 \Rightarrow c=16 & \text{غ ق ق} \\ b=-12 \Rightarrow c=36 & \text{ق ق} \end{cases}$$

نه صعودی نه نزولی $q = -3 \Rightarrow 4, -12, 36$: دنباله هندسی

دنباله حسابی $d = -32 \Rightarrow 36, 4, -28$

$$|-32 - (-3)| = 29$$

۲۵. گزینه ۱ درست است.

$$t_n = t_1 + (n-1)d, t_1 = 5, d = 6$$

$$t_n = 5 + (n-1) \times 6 \rightarrow \boxed{t_n = 6n - 1}$$

$$1000 \leq t_n \leq 9999 \rightarrow 1000 \leq 6n - 1 \leq 9999$$

$$1001 \leq 6n \leq 10000 \rightarrow 167 \leq n \leq 1666$$

تعداد جملات ۴ رقمی: $(1666 - 167) + 1 = 1500$

۲۶. گزینه ۳ درست است.

تعداد دایره‌های توپر از الگوی $t_n = n^2$ و تعداد دایره‌های توخالی از الگوی $b_n = n(n-1)$ به دست می‌آید. بنابراین:

$$t_{20} = 20^2 = 400$$

$$t_n + b_n = n^2 + n(n-1) = 20^2 + 20 \times 19 = 780$$

$$\text{درصد تعداد دایره‌های توپر جمله بیستم} = \frac{400}{780} \times 100 = 51.28$$

۲۷-گزینه ۱ درست است.

دنباله a_n دنباله درجه دوم است و کوچک‌ترین جمله آن به ازای $n = \frac{-b}{2a} = 8/75$ باید باشد، اما چون در دنباله مقدار n

شماره جمله و عدد طبیعی است، بنابراین $n = 8$ یا $n = 9$ را باید در نظر بگیریم:

$$\left. \begin{aligned} n=8 &\rightarrow a_8 = -135 \\ n=9 &\rightarrow a_9 = -136 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Min}(a_n) = -136$$

در دنباله بازگشتی:

$$b_1 = 1, b_2 = 1+2, b_3 = 1+2+3, \dots, b_n = 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$b_{40} = \frac{40(41)}{2} = 820$$

$$b_{40} \text{ با } a_n \text{ مجموع کوچک‌ترین جمله} = -136 + 820 = 684$$

۲۸. گزینه ۴ درست است.

سه جمله متوالی دنباله هندسی را aq^2, aq, a در نظر می‌گیریم. واضح است که این سه عدد در رابطه فیثاغورس صدق می‌کنند. اما دقت کنید که با توجه به این که با یک دنباله هندسی مواجهیم، a بزرگترین ضلع (وتر) بوده و طبق فیثاغورس داریم:

$$a^2 = (aq)^2 + (aq^2)^2 \Rightarrow a^2 = a^2 q^2 + a^2 q^4 \xrightarrow{\text{تقسیم طرفین بر } a^2} 1 = q^2 + q^4$$

$$\Rightarrow q^4 + q^2 - 1 = 0 \xrightarrow{q^2 = t} t^2 + t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow q^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

چون q^2 مقداری مثبت است، $q^2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ قابل قبول است و از آنجا داریم:

$$q = \pm \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}$$

چون q مقداری مثبت است (اضلاع مثلث که نمی‌توانند منفی باشند!) $q = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}$ قابل قبول است.

حالا دقت کنید که عدد $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ دقیقاً برعکس عدد طلایی $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ است، ببینید:

$$\frac{1}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} \xrightarrow{\text{ضرب و تقسیم در مزدوج مخرج}} = \frac{2(1 - \sqrt{5})}{1 - 5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

پس $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ یعنی برعکس عدد طلایی یا همان برعکس نسبت طول به عرض در مستطیل طلایی، بنابراین، این عدد

نسبت عرض به طول در مستطیل طلایی است و لذا $q = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}$ یعنی جذر نسبت عرض به طول در مستطیل طلایی.

۲۹- گزینه ۴ درست است.

$$t_n = an + b \rightarrow \begin{cases} t_3 = 14 = 3a + b \\ t_7 = 26 = 7a + b \end{cases} \begin{cases} a = 3 \\ b = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{t_n = 3n + 5} \begin{cases} 98 = \text{بزرگترین جمله دو رقمی} \\ 1001 = \text{کوچکترین جمله چهار رقمی} \end{cases}$$

$$\text{مجموع خواسته شده} = 1001 + 98 = 1099$$

۳۰. گزینه ۱ درست است.

$$t_n = an^r + bn + c$$

$$t_1 = 6 \rightarrow 6 = a + b + c$$

$$t_4 = 18 \rightarrow 18 = 16a + 4b + c$$

$$t_9 = 36 \rightarrow 36 = 81a + 9b + c$$

$$\left. \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow t_n = n^r - n + 6$$

$$n = 2 \rightarrow t_2 = x = 2^r - 2 + 6 \rightarrow x = 8$$

$$n = 3 \rightarrow t_3 = x + y = 3^r - 3 + 6 \rightarrow 8 + y = 12 \rightarrow y = 4$$

$$n = 5 \rightarrow t_5 = y + z = 5^r - 5 + 6 \rightarrow 4 + z = 26 \rightarrow z = 22$$

$$n = 8 \rightarrow t_8 = 8^r - 8 + 6 \rightarrow t_8 = 62$$

$$n = 16 \rightarrow t_{16} = 16^r - 16 + 6 \rightarrow t_{16} = 246$$

$$t_8 + x + y + z + t_{16} = 62 + 8 + 4 + 22 + 246 = 342$$

۳۱- گزینه ۱ درست است.

جمله عمومی دنباله درجه دوم:

$$t_n = an^r + bn + c$$

$$a = \frac{1}{\gamma^2}(-14) = -\frac{1}{\Delta} \rightarrow t_n = -\frac{1}{\Delta}n^r + bn + c$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{\Delta} = 14 \\ t_{\gamma} = 17/2 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 14 = -\frac{1}{\Delta}(\Delta)^r + \Delta b + c \\ 17/2 = -\frac{1}{\Delta}(\gamma)^r + \gamma b + c \end{array} \right. \rightarrow b = 4, c = -1$$

$$t_n = -\frac{1}{\Delta}n^r + 4n - 1$$

$$n_{\max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-\frac{1}{\Delta})} = 10$$

$$t_{10} = -\frac{1}{\Delta}(10)^r + 4(10) - 1 = 19 \text{ بزرگترین جمله دنباله}$$

۳۲. گزینه ۲ درست است.

$$\left. \begin{array}{l} \text{دنباله حسابی: } a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots, a_1 + (n-1)d \\ \text{جمله اول} \quad \text{مجموع } 3 \quad = 3a_1 + 3d = 3 \\ \text{جمله دوم} \quad \text{مجموع } 3 \quad = 3a_1 + 12d = 39 \end{array} \right\} \rightarrow a_1 = -3, d = 4, \boxed{a_n = 4n - 7}$$

با کمی دقت در الگوی شکل داده شده، جمله عمومی آن $t_n = n^2 + 4n$ به دست می آید. (به صفحه ۱۷ و ۱۸ کتاب درسی ریاضی (۱) مراجعه شود). یازدهمین جمله $t_{11} = 11^2 + 4(11) = 165$ است. بنابراین: $\boxed{n=43} \rightarrow 4n-7=165$

۳۳. گزینه ۴ درست است.

به طول نقاط A و B و C توجه کنید:

$$a_1, a_4, a_7$$

سه جمله، متساوی الفاصله از دنباله حسابی a_n هستند، پس با یکدیگر تشکیل دنباله حسابی جدیدی می دهند. می دانیم که در تابع نمایی، اگر ورودی ها (X ها) تشکیل دنباله حسابی دهند، خروجی های (Y های) متناظر، تشکیل دنباله هندسی می دهند. حالا به عرض نقاط A و B و C توجه کنید:

$$a_2, a_6, a_8$$

جملات دوم، ششم و هشتم از دنباله حسابی هستند و طبق آنچه در بالا گفتیم، باید سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند.

در واقع سؤال به مسئله معروف زیر تبدیل می شود:

«جملات دوم، ششم و هشتم از یک دنباله حسابی، سه جمله متوالی یک دنباله هندسی هستند.»

قدرنسبت دنباله هندسی موردنظر، به راحتی قابل محاسبه و برابر با $q = \frac{1}{4}$ است در نتیجه:

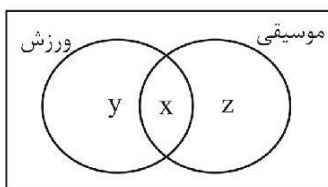
$$a_2 \times \frac{1}{4} = a_6 \Rightarrow a_2 = 4a_6 \Rightarrow a_1 + d = 4(a_1 + 5d) \Rightarrow a_1 + d = 4a_1 + 20d \Rightarrow 0 = a_1 + 19d \Rightarrow a_{10} = 0$$

۳۴. گزینه ۳ درست است.

۴۵ درصد از دانش آموزان مدرسه عضو هیچ گروهی نیستند. تعداد آن ها را به دست می آوریم:

$$\frac{45}{100} \times 80 = 36 \text{ نفر}$$

پس $80 - 36 = 44$ نفر عضو گروه های ورزش یا موسیقی هستند. نمودار ون را رسم می کنیم:



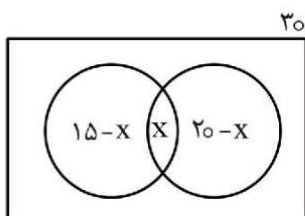
$$x + y + z = 44$$

می دانیم ۷۵ درصد از افراد گروه ورزش ($x + y$) عضو گروه موسیقی هم هستند، یعنی هم عضو گروه ورزش هستند و هم عضو گروه موسیقی، یعنی قسمت مشترک آن ها (x)، پس:

$$\frac{75}{100}(x + y) = x \Rightarrow \frac{3}{4}(x + y) = x \Rightarrow \frac{3}{4}y = \frac{1}{4}x \Rightarrow y = \frac{1}{3}x$$

۳۵- گزینه ۴ درست است.

تعداد اعضای که عضو هر دو تیم هستند را x در نظر گرفته و نمودار ون را رسم می‌کنیم:



واضح است که:

$$(15-x) + x + (20-x) \leq 30 \Rightarrow 35 - x \leq 30 \Rightarrow 5 \leq x$$

پس حداقل ۵ نفر از این کلاس، عضو هر دو گروه هستند.

حالا باید تعداد افرادی که عضو هیچ تیمی نیستند را به دست آوریم:

$$30 - ((15-x) + x + (20-x)) = 30 - (35-x) = x - 5 \xrightarrow{5 \leq x} 0 \leq x - 5$$

پس تعداد این افراد، بزرگ‌تر یا مساوی صفر است و هر کدام از گزینه‌های ۱ و ۲ و ۳ می‌تواند باشد.



تست و پاسخ ۱

اگر A و B دو مجموعه در مجموعه مرجع U باشد و $A \cap B = B$ ، آن گاه چه تعداد از موارد زیر الزاماً درست است؟
 الف) $A' \cup B = U$ ب) $A \cup B' = B'$ پ) $B' \subseteq A'$ ت) $A' - B' = \emptyset$
 ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

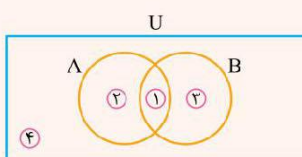
پاسخ: گزینه ۱

مشاوره بهترین راه برای حل این سوالات، رسم نمودار ون و شماره گذاری بخش های آن است.

خودت حل کنی بهتره با توجه به شرط $A \cap B = B$ ، باید B داخل A باشد.

درس نامه حل سوالات مجموعه با شماره گذاری قسمت های نمودار ون

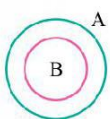
مطابق شکل، نمودار ون مربوط به دو مجموعه A و B را به ۴ قسمت تقسیم می کنیم:



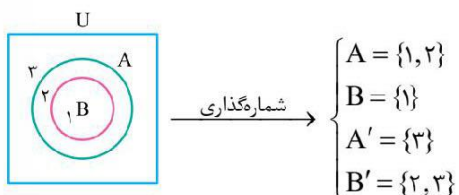
شماره یا شماره های قسمت های مهم را در جدول زیر می بینید:

مجموعه	A	B	$A \cap B$	$A \cup B$	$A - B$	$B - A$	A'	B'	$(A \cup B)'$ یا $A' \cap B'$	$(A \cap B)'$ یا $A' \cup B'$
شماره قسمت (ها)	۱, ۲	۱, ۳	۱	۱, ۲, ۳	۲	۳	۳, ۴	۲, ۴	۴	۲, ۳, ۴

پاسخ تشریحی گام اول: از $A \cap B = B$ نتیجه می گیریم $B \subseteq A$ است:



گام دوم: روی نمودار ون برای A ، B ، A' و B' شماره مشخص می کنیم:



گام سوم: با توجه به نمودار ون گام دوم، چهار مورد را بررسی می کنیم:

$$\text{الف) } A' \cup B = U \xrightarrow{\text{بررسی}} \begin{cases} A' \cup B = \{3\} \cup \{1\} = \{1, 3\} \\ U = \{1, 2, 3\} \end{cases} \xrightarrow{\text{برابر نیستند}} \times$$

$$\text{ب) } A \cup B' = B' \xrightarrow{\text{بررسی}} \begin{cases} A \cup B' = \{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\} \\ B' = \{2, 3\} \end{cases} \xrightarrow{\text{برابر نیستند}} \times$$

$$\text{پ) } B' \subseteq A' \xrightarrow{\text{بررسی}} \{2, 3\} \subseteq \{3\} \xrightarrow{\text{نادرست}} \times$$

$$\text{ت) } A' - B' = \emptyset \xrightarrow{\text{بررسی}} A' - B' = \{3\} - \{2, 3\} = \emptyset \xrightarrow{\text{درست}} \checkmark$$

گام چهارم: پس فقط مورد «ت» درست است.

تست و پاسخ 2

با کدام انتخاب برای A ، مجموعه $\{x \in A \mid 1 - 2x^2 > 0\}$ ناتهی و متناهی است؟

Q (۴)

Q' (۳)

W (۲)

N (۱)

پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره جواب نامعادله $u^2 < A$ به صورت $-\sqrt{A} < u < \sqrt{A}$ است ($A > 0$).

درس نامه •• مجموعه های اعداد

مجموعه	N	W یا I	Z	Q	Q یا Q'	R
اسم	طبیعی	حسابی	صحیح	گویا	گنگ	حقیقی
اعضا	۱, ۲, ۳, ...	۰, ۱, ۲, ۳,, ۲, ۱, ۰, ۱, ۲, ۳, ...	$\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R} - \mathbb{Q}$	همه اعداد روی محور

پاسخ تشریحی

$$1 - 2x^2 > 0 \Rightarrow 2x^2 < 1 \Rightarrow x^2 < \frac{1}{2} \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

گام دوم: ما الان قسمتهایی از جواب نامعادله بالا را می‌خواهیم که تعداد اعضای آن قابل شمارش و مخالف صفر باشند:

- هیچ عدد طبیعی در این محدوده نیست؛ پس با انتخاب \mathbb{N} ، مجموعه تهی می‌شود.
 - یک عدد حسابی ($x = 0$) در این محدوده است؛ پس با انتخاب \mathbb{W} ، مجموعه ما ناتهی و متناهی می‌شود.
 - بی‌شمار عدد گنگ در این محدوده داریم؛ پس با انتخاب \mathbb{Q}' ، مجموعه ما ناتهی ولی نامتناهی می‌شود.
 - بی‌شمار عدد گویا در این محدوده داریم؛ پس با انتخاب \mathbb{Q} ، مجموعه ما ناتهی ولی نامتناهی می‌شود.
- پس \mathbb{W} انتخاب درستی است.

تست و پاسخ 3

از ۲۰ دانش‌آموز یک کلاس، ۱۵ نفر در فوتبال و ۱۲ نفر در والیبال ثبت‌نام کرده‌اند. تعداد دانش‌آموزانی که در هیچ یک از این دو رشته ثبت‌نام نکرده‌اند، چند مقدار مختلف می‌تواند باشد؟

۴ (۴)

۶ (۳)

۷ (۲)

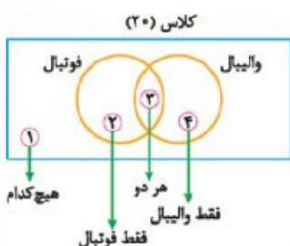
۵ (۱)

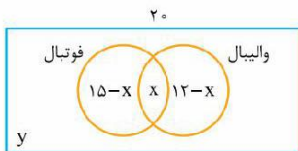
پاسخ: گزینه ۲

مشاوره برای حل این سوالات حتماً از نمودار ون کمک بگیرید.

خودت حل کنی بهتره تعداد اعضای قسمت اشتراک دو ناحیه را X بگیرد و بقیه قسمت‌ها را برحسب X بنویسد.

پاسخ تشریحی





گام دوم: باید با خانه (۳) شروع کنیم. چون نداریمش، آن را می‌گیریم.

مجموع (۲) و (۳) باید ۱۵ باشد؛ پس (۲) می‌شود $15 - x$.

مجموع (۳) و (۴) باید ۱۲ باشد؛ پس (۴) می‌شود $12 - x$.

قسمت (۱) را هم y می‌گیریم:

$$y + (15 - x) + x + (12 - x) = 20 \Rightarrow y = x - 7$$

گام سوم: مجموع اعداد چهار قسمت باید ۲۰ باشد:

گام چهارم: مقادیر x ، $12 - x$ ، x ، $15 - x$ و y باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشند:

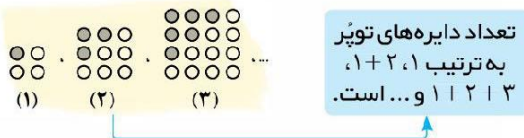
$$\left. \begin{array}{l} 12 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 12 \\ x \geq 0 \\ 15 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 15 \\ y \geq 0 \Rightarrow x - 7 \geq 0 \Rightarrow x \geq 7 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 7 \leq x \leq 12 \Rightarrow x = \underbrace{7, 8, 9, 10, 11, 12}_{\text{مقدار ۶}}$$

۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵

گام پنجم: پس $y = x - 7$ هم ۶ مقدار متفاوت می‌تواند داشته باشد:

تست و پاسخ 4

با توجه به الگوی زیر، اگر در شکل n ام ۴۵ درصد دایره‌ها توپر باشند، تعداد دایره‌های توخالی در شکل (۱-۲۸)ام کدام است؟



(۱) ۱۸۰

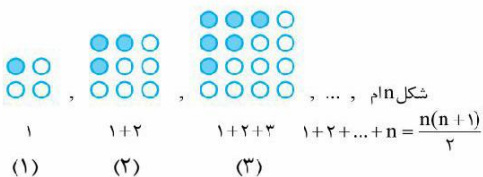
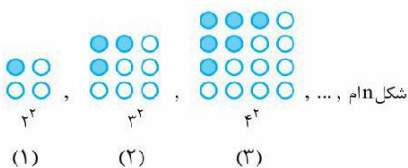
(۲) ۲۱۱

(۳) ۱۷۱

(۴) ۱۹۰

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی: گام اول: الگوی تعداد کل دایره‌ها در شکل n ام را پیدا می‌کنیم:



گام دوم: الگوی تعداد دایره‌های توپر در شکل n ام را پیدا می‌کنیم:

گام سوم: از تفاضل دو الگوی بالا، تعداد دایره‌های توخالی در شکل n ام به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \text{تعداد دایره‌های توخالی} &= (\text{تعداد کل دایره‌ها}) - (\text{تعداد دایره‌های توپر}) = (n+1)^2 - \frac{n(n+1)}{2} = (n+1)\left(n+1 - \frac{n}{2}\right) \\ &= (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) \end{aligned}$$

گام چهارم: در شکل n ام، نسبت دایره‌های توپر به کل دایره‌ها ۴۵ درصد شده؛ پس:

$$\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{(n+1)^2} = \frac{45}{100} \Rightarrow \frac{n}{2(n+1)} = \frac{9}{20} \Rightarrow 10n = 9n + 9 \Rightarrow n = 9$$

گام پنجم: پس شکل $28 - 1 = 27$ ام، یعنی شکل ۱۷ام، تعداد دایره‌های توخالی شکل ۱۷ برابر است با:

$$(n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = (17+1)\left(\frac{17}{2} + 1\right) = 18 \times \frac{19}{2} = 171$$

تست و پاسخ 5

در الگوی درجه دوم $1, 1, 4, \dots$ ، جمله دهم کدام است؟

۵۴ (۴)

۵۳ (۳)

۵۲ (۲)

۵۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره فرم کلی الگوی درجه دوم به صورت $t_n = an^2 + bn + c$ است.

درس نامه... الگوهای درجه یک و درجه دو

الگو	فرم کلی	روش به دست آوردن a	روش به دست آوردن b و c
درجه یک	$an + b$	مقداری که به جملات اضافه می شود.	با جای گذاری یک جمله از دنباله، b را به دست می آوریم.
درجه دو	$an^2 + bn + c$	<ul style="list-style-type: none"> مقداری که به جملات اضافه می شود را زیرشان می نویسیم. مقادیری که نوشتیم تشکیل یک دنباله حسابی می دهند. نصف قدرنسبت این دنباله برابر با a می شود. 	با جای گذاری دو جمله از دنباله، مقادیر b و c را به دست می آوریم.

پاسخ تشریحی راه اول:

$$\begin{array}{ccccccc} -1 & , & 1 & , & 4 & , & \dots \\ & & +2 & & +3 & & \\ & & +1 & & & & \end{array}$$

گام اول: مقداری که به جملات اضافه می شود را زیرشان می نویسیم:

گام دوم: قدرنسبت مقادیری که به جملات متوالی اضافه می شود $d = 1$ است؛ پس ضریب n^2 ، نصف آن یعنی $a = \frac{1}{2}$ است.

تا این جا دنباله به شکل $t_n = \frac{1}{2}n^2 + bn + c$ شد.

گام سوم: با جای گذاری $t_1 = -1$ و $t_2 = 1$ و حل دستگاه، مقادیر b و c را پیدا می کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} t_1 = -1 \Rightarrow \frac{1}{2} + b + c = -1 \Rightarrow b + c = -\frac{3}{2} \\ t_2 = 1 \Rightarrow 2 + 2b + c = 1 \Rightarrow 2b + c = -1 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{حل}} b = \frac{1}{2}, c = -2$$

گام چهارم: پس جمله عمومی دنباله به صورت $t_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 2$ است. جمله دهم این دنباله برابر است با:

$$t_{10} = \frac{1}{2}(10^2) + \frac{1}{2}(10) - 2 = 50 + 5 - 2 = 53$$

راه دوم:

$$\begin{array}{ccccccc} -1 & , & 1 & , & 4 & , & \dots \\ & & +2 & & +3 & & \end{array}$$

گام اول: الگوی بین جملات متوالی را پیدا می کنیم:

یعنی اگر ۴ واحد به جمله سوم اضافه کنیم، جمله چهارم به دست می آید و این الگو را باید ادامه دهیم.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} -1 & , & 1 & , & 4 & , & 8 & , & 13 & , & 19 & , & 26 & , & 34 & , & 43 & , & 53 & , & \dots \\ & & +2 & & +3 & & +4 & & +5 & & +6 & & +7 & & +8 & & +9 & & +10 & & \end{array} \rightarrow t_{10}$$

گام دوم:

تست و پاسخ 6

جملات دنباله حسابی $3, a, b, 15, c, d, e, \dots$ را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته، برابر با شماره آن دسته باشد، به این شکل: $\dots, (a, b), (15, c, d), (3)$. کوچک‌ترین عدد دسته پانزدهم کدام است؟

۴۲۳ (۴)

۴۱۹ (۳)

۴۱۳ (۲)

۴۰۹ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره این مدل سؤال جز معروف‌ترین سؤالات دنباله است که تا الان ۴ یا ۵ بار در کنکور آمده است.

خودت حل کنی بهتره تا آخر دسته چهاردهم، $1 + 2 + \dots + 14$ تا جمله از دنباله حسابی را نوشته‌ایم.

درس‌نامه... یک تیپ سؤال معروف در دنباله حسابی

یک تیپ سؤال داریم که اعداد طبیعی را دسته‌بندی می‌کند، بعد مثلاً عدد اول دسته n ام یا مجموع اعداد دسته n ام را می‌خواهد. این مدل سؤال زیاد در کنکور مطرح شده است. ما هم یک نمونه از آن را این‌جا حل می‌کنیم. به روش حل دقت کنید.

مثال: اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات در هر دسته، برابر شماره آن دسته باشد: $\dots, (7, 9, 11), (3, 5), (1)$ ، مجموع جمله‌های اول و آخر دسته سی‌ام کدام است؟

۱۸۵۰ (۴)

۱۸۰۰ (۳)

۱۷۵۰ (۲)

۱۷۰۰ (۱)

گزینه «۳» تعداد اعداد استفاده‌شده در دسته اول یکی، در دسته دوم ۲ تا، ... و در دسته بیست و نهم ۲۹ تا است؛ پس تا آخر دسته بیست و نهم، تعداد کل اعدادی که نوشته شده‌اند برابر است با:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 29 = \frac{29 \times 30}{2} = 435$$

پس اولین عدد دسته سی‌ام می‌شود ۴۳۶امین عدد فرد.

۲۹ تا بریم جلوتر می‌شود آخرین عدد این دسته، یعنی ۴۶۵امین عدد فرد.

برای محاسبه n امین عدد فرد از رابطه $2n - 1$ استفاده می‌کنیم؛ پس:

$$\left. \begin{aligned} 436 \text{امین عدد فرد} &= \text{عدد اول دسته سی‌ام} \\ 465 \text{امین عدد فرد} &= \text{عدد آخر دسته سی‌ام} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{مجموع}} 436 + 465 = 901$$

نکته ۱ مجموع اعداد طبیعی متوالی از ۱ تا n برابر است با: $\frac{n(n+1)}{2}$

۲ اگر a_m و a_n به ترتیب جملات m ام و n ام از دنباله حسابی با قدر نسبت d باشند، آن‌گاه: $a_m - a_n = (m - n)d$

پاسخ تشریحی گام اول: جملات اول و چهارم دنباله حسابی را داریم: $a_1 = 3$ و $a_4 = 15$

اختلاف آن‌ها برابر با $3d$ است؛ پس:

گام دوم: تعداد جملات هر دسته برابر با شماره آن دسته است، یعنی تا آخر دسته چهاردهم، تعداد جملات استفاده‌شده برابر با مجموع اعداد

۱ تا ۱۴ است:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & 14 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ \text{تعداد} & & \text{تعداد} & & \text{تعداد} & & & & \text{تعداد} \\ \text{اعداد} & & \text{اعداد} & & \text{اعداد} & & & & \text{اعداد} \\ \text{دسته} & & \text{دسته} & & \text{دسته} & & & & \text{دسته} \\ \text{اول} & & \text{دوم} & & \text{سوم} & & & & \text{چهاردهم} \end{array} = \frac{14 \times 15}{2} = 105$$

پس آخرین عدد دسته چهاردهم، ۱۰۵امین جمله دنباله و اولین عدد دسته پانزدهم، ۱۰۶امین جمله دنباله حسابی ما است.

گام سوم: جمله ۱۰۶ام دنباله حسابی با $a_1 = 3$ و $d = 4$ را حساب می‌کنیم:

$$a_{106} = a_1 + 105d = 3 + 105(4) = 423$$

تست و پاسخ 7

جمله‌های دوم، سوم و ششم یک دنباله حسابی غیر ثابت، سه جمله متوالی دنباله هندسی هستند. نسبت جمله دوم به جمله اول در دنباله حسابی کدام است؟

$$-2 \quad (4)$$

$$-1 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره اگر x, y, z سه جمله متوالی دنباله هندسی باشند، آن گاه $y^2 = xz$.

درس نامه روابط اصلی دنباله‌های حسابی و هندسی

تعریف	حسابی (عددی)	هندسی
به هر جمله نسبت به جمله قبلی یک مقدار ثابت اضافه می‌شود.	هر جمله نسبت به جمله قبلی در یک مقدار ثابت ضرب می‌شود.	
جمله عمومی	$a_n = a_1 + (n-1)d$	$a_n = a_1 q^{n-1}$
رابطه بازگشتی	$a_{n+1} = a_n + d$	$a_{n+1} = a_n \times q$
رابطه اندیس‌ها	$n + m = p + t \Rightarrow a_n + a_m = a_p + a_t$	$n + m = p + t \Rightarrow a_n \times a_m = a_p \times a_t$
سه جمله متوالی (x, y, z)	$y = \frac{x+z}{2}$ به y ، واسطه حسابی x و z می‌گویند.	$y^2 = xz$ به y ، واسطه هندسی x و z می‌گویند.
درج k واسطه بین a و b	$d = \frac{b-a}{k+1}$	$q^{k+1} = \frac{b}{a}$
تعدادی فرد جمله متوالی	$a_1 + a_3 + a_5 = 3a_3$ مثال: $\xrightarrow{\text{مثال}} a_1 + a_3 + a_5 = 3a_3$ مجموع	$a_1 a_3 a_5 = (a_3)^3$ مثال: $\xrightarrow{\text{مثال}} a_1 a_3 a_5 = (a_3)^3$ تعداد (وسطی) حاصل ضرب

نکته اگر جملات a_n, a_m, a_p و a_1 یک دنباله حسابی، سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشد، قدرنسبت دنباله هندسی از رابطه

$$q = \frac{p-m}{m-n}$$

مثلاً اگر جملات سوم، هفتم و سیزدهم یک دنباله حسابی، سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، آن گاه:

$$q = \frac{13-7}{7-3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** جملات دوم، سوم و ششم یک دنباله حسابی، سه جمله متوالی یک دنباله هندسی‌اند؛ پس طبق نکته بالا، قدرنسبت

$$q = \frac{6-3}{3-2} = 3$$

دنباله هندسی برابر است با:

گام دوم: جملات دوم و سوم دنباله حسابی را به صورت $a_1 + d$ و $a_1 + 2d$ می‌نویسیم.

نسبت a_3 به a_2 باید برابر با q باشد؛ پس:

$$\frac{a_1 + 2d}{a_1 + d} = 3 \Rightarrow 3a_1 + 3d = a_1 + 2d \Rightarrow d = -2a_1$$

گام سوم: به کمک رابطه $d = -2a_1$ ، جمله دوم دنباله حسابی را بر حسب a_1 می‌نویسیم:

$$a_2 = a_1 + d = a_1 - 2a_1 = -a_1$$

گام چهارم: نسبت a_2 به a_1 برابر است با:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{-a_1}{a_1} = -1$$

تست و پاسخ 8

اگر اعداد $x, 2x+1$ و $y+2$ به ترتیب از راست به چپ سه جمله اول یک دنباله حسابی و اعداد x, y و xy به ترتیب از راست به چپ، سه جمله اول یک دنباله هندسی با جملات غیر صفر باشند، جمع جملات پنجم دو دنباله چه عددی است؟

۹۷ (۴)

۲۶۲ (۳)

۱۰۰ (۲)

۲۵۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره در هر دو دنباله از رابطه بین سه جمله متوالی استفاده کنید.

درس نامه .. دنباله حسابی و هندسی

هندسی	حسابی (عددی)	
هر جمله نسبت به جمله قبلی در یک مقدار ثابت ضرب می شود.	به هر جمله نسبت به جمله قبلی یک مقدار ثابت اضافه می شود.	تعریف
$a_n = a_1 q^{n-1}$	$a_n = a_1 + (n-1)d$	جمله عمومی
$a_{n+1} = a_n \times q$	$a_{n+1} = a_n + d$	رابطه بازگشتی
$n+m=p+t \Rightarrow a_n \times a_m = a_p \times a_t$	$n+m=p+t \Rightarrow a_n + a_m = a_p + a_t$	رابطه اندیس ها
$y^z = xz$ به y ، واسطه هندسی X و Z می گویند.	$y = \frac{x+z}{2}$ به y ، واسطه حسابی X و Z می گویند.	سه جمله متوالی (x, y, z)
$q^{k+1} = \frac{b}{a}$	$d = \frac{b-a}{k+1}$	درج k واسطه بین a و b
مثال: تعداد (وسطی) = حاصل ضرب $a_7 a_8 a_9 = (a_8)^3$	مثال: وسطی \times تعداد = مجموع $a_7 + a_8 + a_9 = 3a_8$	تعدادی فرد جمله متوالی

پاسخ تشریحی گام اول: اعداد $x, 2x+1$ و $y+2$ ، سه جمله متوالی دنباله حسابی اند؛ پس:

$$2x+1 = \frac{x+(y+2)}{2} \Rightarrow 4x+2 = x+y+2 \Rightarrow y=3x$$

$$x, y, xy \xrightarrow{y=3x} x, 3x, 3x^2$$

گام دوم: اعداد x, y و xy را بر حسب x می نویسیم:

$$(3x)(3x^2) = 3x^3 \xrightarrow{x \neq 0} x=3 \xrightarrow{y=3x} y=9$$

پس اگر $3x$ ضرب در ۳ شود، باید به $3x^2$ برسیم:

جملات دنباله هندسی به صورت $3, 9, 27, \dots$ می شوند.

$$\text{حسابی: } \underbrace{x, 2x+1}_3, \underbrace{y+2}_7, \dots \xrightarrow[d=4]{a_1=3} a_5 = a_1 + 4d = 3 + 4(4) = 19$$

گام سوم: جمله پنجم هر دو دنباله را پیدا می کنیم:

$$\text{هندسی: } 3, 9, 27, \dots \xrightarrow[q=3]{t_1=3} t_5 = t_1 q^4 = 3 \times 3^4 = 243$$

$$a_5 + t_5 = 19 + 243 = 262$$

گام چهارم: مجموعشان برابر است با:

تست و پاسخ 9

در یک مدرسه با ۱۸۰ دانش آموز، تعداد علاقه‌مندان به ریاضی سه برابر تعداد علاقه‌مندان به فیزیک است. اگر تعداد دانش‌آموزانی که به هر دو علاقه‌مند هستند با دانش‌آموزانی که به هیچ‌یک علاقه‌مند نیستند برابر بوده و از دانش‌آموزان علاقه‌مند به فیزیک ۲۰ تا کم‌تر باشد، تعداد دانش‌آموزان علاقه‌مند به ریاضی کدام است؟

۱۳۵ (۴)

۱۳۰ (۳)

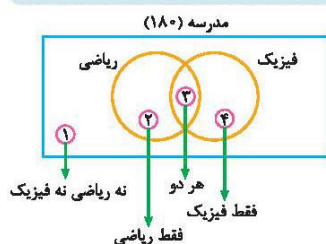
۱۲۵ (۲)

۱۱۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره برای حل این سؤالات حتماً از نمودار ون کمک بگیرید.

خوبت حل کنی بهتره تعداد اعضای قسمت اشتراک دو ناحیه را X بگیرید و بقیه قسمت‌ها را بر حسب X بنویسید.



پاسخ تشریحی گام اول، نمودار ون مناسب برای این سؤال می‌کشیم:

گام دوم: باید با قسمت (۳) یا همان اشتراک قسمت‌ها شروع کنیم؛ تعداد اعضای آن را X می‌گیریم.

طبق فرض سؤال، تعداد اعضای قسمت (۱) با (۳) برابر است، پس آن را هم X می‌گیریم.

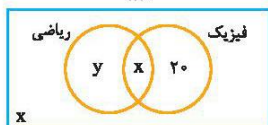
مجموع عضوهای قسمت‌های (۳) و (۴) از قسمت (۳)، ۲۰ تا بیشتر است؛ پس قسمت (۴) باید ۲۰ عضو داشته باشد.

علاقه‌مند به فیزیک

مجموع قسمت‌های (۲) و (۳)، ۳ برابر مجموع قسمت‌های (۳) و (۴) است؛ پس با فرض این‌که قسمت (۲)، Y عضو داشته باشد، داریم:

۱۸۰

علاقه‌مند به ریاضی



$$y + x = 3 \times \text{علاقه‌مند به فیزیک} = 3 \times (x + 20) \Rightarrow y = 2x + 60$$

گام سوم، مجموع اعضای چهار قسمت باید ۱۸۰ باشد:

$$x + y + x + 20 = 180 \xrightarrow{y=2x+60} x + (2x+60) + x + 20 = 180 \Rightarrow 4x = 100 \Rightarrow x = 25$$

گام چهارم، تعداد علاقه‌مندان به ریاضی یعنی مجموع x و y برابر است با: $y + x = (2x + 60) + x = 3x + 60 = 3(25) + 60 = 135$

تست و پاسخ 10

در دنباله خطی با جمله عمومی $a_n = 7n + 9$ ، اگر $\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{k-1}} + \sqrt{a_k}} = 4$ مقدار k کدام است؟

۱۴۹ (۴)

۱۴۷ (۳)

۱۴۵ (۲)

۱۴۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

خوبت حل کنی بهتره صورت و مخرج تمام کسرها را در مزدوج مخرجشان ضرب کنید.

فرم کسر	روش گویا کردن مخرج	مثال
$\frac{\circ}{\sqrt{a}}$	صورت و مخرج را در \sqrt{a} ضرب می کنیم.	$\frac{6}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$
$\frac{\circ}{\sqrt[n]{a^n}}$	صورت و مخرج را در $\sqrt[n]{a^k}$ ضرب می کنیم. (k کوچک ترین عددی است که به ازای آن $n+k$ مضرب m است.)	$\frac{12}{\sqrt[3]{24}} \times \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{12\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^6}} = \frac{12\sqrt[3]{4}}{4} = 3\sqrt[3]{4}$
$\frac{\circ}{\sqrt{a \pm b}}$ یا $\frac{\circ}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$	صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می کنیم.	$\frac{6}{\sqrt{7}-2} \times \frac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{7}+2} = \frac{6(\sqrt{7}+2)}{7-4} = 2(\sqrt{7}+2)$
$\frac{\circ}{\sqrt[3]{a \pm b}}$ یا $\frac{\circ}{\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}}$	صورت و مخرج را در چاق مخرج ضرب می کنیم.	$\frac{3}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}} = \frac{3(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})}{5}$
$\frac{\circ}{\sqrt[3]{a^2 \pm \sqrt{ab} + \sqrt{b^2}}}$	صورت و مخرج را در لاغر مخرج ضرب می کنیم.	$\frac{10}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}} \times \frac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}} = \frac{10(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})}{5} = 2(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})$

نکته در دنباله حسابی (یا همان الگوی خطی) فرم جمله عمومی به صورت $a_n = dn + c$ است که ضریب n همان فاصله بین جملات متوالی (قدرنسبت) است.

پاسخ تشریحی

گام اول: با توجه به نکته، جمله عمومی $a_n = 7n + 9$ مربوط به یک الگوی خطی با قدرنسبت $d = 7$ است.

گام دوم: صورت و مخرج تمام کسرها را در مزدوج مخرج شان ضرب می کنیم:

$$\bullet \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_1}} \times \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}} = \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{\underbrace{a_2 - a_1}_7} = \frac{-\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}}{7}$$

$$\bullet \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k-1}}} \times \frac{\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k-1}}}{\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k-1}}} = \frac{\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k-1}}}{\underbrace{a_k - a_{k-1}}_7} = \frac{-\sqrt{a_{k-1}} + \sqrt{a_k}}{7}$$

گام سوم: مخرج همه کسرها 7 شد. آنها را با هم جمع می کنیم و برابر با 4 قرار می دهیم:

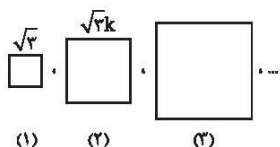
$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{k-1}} + \sqrt{a_k}} = 4 \Rightarrow \frac{-\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}}{7} + \frac{-\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}}{7} + \dots + \frac{-\sqrt{a_{k-1}} + \sqrt{a_k}}{7} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{-\sqrt{a_1} + \sqrt{a_k}}{7} = 4 \xrightarrow{a_n = 7n + 9} \frac{-\sqrt{7(1) + 9} + \sqrt{7k + 9}}{7} = 4 \Rightarrow -4 + \sqrt{7k + 9} = 28 \Rightarrow \sqrt{7k + 9} = 32$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} 7k + 9 = 1024 \Rightarrow k = 145$$

تست و پاسخ 11

در الگوی زیر، طول ضلع هر مربع k برابر ضلع مربع قبلی است. اگر مساحت مربع بیستم ۸۱ برابر مساحت مربع چهاردهم باشد، طول ضلع مربع دهم کدام است؟



$$\frac{7}{3^2} \quad (2)$$

$$\frac{9}{3^2} \quad (4)$$

$$27 \quad (1)$$

$$\frac{11}{3^2} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

خوب حل کنی بهتره اضلاع مربعی تشکیل یک دنباله هندسی با $a_1 = \sqrt{3}$ و $q = k$ می‌دهند. همچنین نسبت $(a_{20})^2$ به $(a_{14})^2$ برابر ۸۱ است.

درس نامه روابط اصلی دنباله‌های حسابی و هندسی

تعریف	حسابی (عددی)	هندسی
به هر جمله نسبت به جمله قبلی، یک مقدار ثابت اضافه می‌شود.	هر جمله نسبت به جمله قبلی، در یک مقدار ثابت ضرب می‌شود.	
جمله عمومی	$a_n = a_1 + (n-1)d$	$a_n = a_1 q^{n-1}$
رابطه بازگشتی	$a_{n+1} = a_n + d$	$a_{n+1} = a_n \times q$
رابطه اندیس‌ها	$n + m = p + t \Rightarrow a_n + a_m = a_p + a_t$	$n + m = p + t \Rightarrow a_n \times a_m = a_p \times a_t$
سه جمله متوالی (x, y, z)	$y = \frac{x+z}{2}$ به y ، واسطه حسابی x و z می‌گویند.	$y^2 = xz$ به y ، واسطه هندسی x و z می‌گویند.
درج k واسطه بین a و b	$d = \frac{b-a}{k+1}$	$q^{k+1} = \frac{b}{a}$
تعدادی فرد جمله متوالی	وسطی \times تعداد = مجموع مثال $\rightarrow a_7 + a_8 + a_9 = 3a_8$	تعداد (وسطی) = حاصل ضرب مثال $\rightarrow a_7 a_8 a_9 = (a_8)^3$

پاسخ تشریحی گام اول: اضلاع مربع‌ها تشکیل دنباله هندسی با جمله اول $a_1 = \sqrt{3}$ و قدرنسبت $q = k$ می‌دهند.

گام دوم: ضلع و مساحت مربع‌های بیستم و چهاردهم را حساب می‌کنیم:

$$a_{14} = a_1 q^{13} = \sqrt{3} k^{13} \xrightarrow{\text{مساحت}} S_{14} = (\sqrt{3} k^{13})^2 = 3k^{26}$$

$$a_{20} = a_1 q^{19} = \sqrt{3} k^{19} \xrightarrow{\text{مساحت}} S_{20} = (\sqrt{3} k^{19})^2 = 3k^{38}$$

$$\frac{3k^{38}}{3k^{26}} = 81 \Rightarrow k^{12} = 3^4 \Rightarrow k = 3^{\frac{4}{12}} = 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}$$

نسبت S_{20} به S_{14} ، ۸۱ شده؛ پس:

$$a_{10} = a_1 q^9 = \sqrt{3} \times (\sqrt[3]{3})^9 = \sqrt{3} \times 3^3 = 3^{\frac{1}{2}+3} = 3^{\frac{7}{2}}$$

گام سوم: ضلع مربع ۱۰ام برابر است با:

تست و پاسخ 12

اگر سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی را به ترتیب با ۱، ۱ و ۹ جمع کنیم، سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی ساخته می‌شود. اگر جمله وسطی دنباله حسابی ۵ باشد، قدرنسبت دنباله هندسی صعودی کدام است؟

- (۱) ۵/۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره اگر با تعدادی فرد جمله از دنباله حسابی روبه‌رو بودید، بهتر است جمله وسط را x بگیرید (شاید هم مثل این سوال آن را داشته باشید). بعد d تا d تا به آن اضافه یا از آن کم کنید تا بقیه جملات هم ساخته شوند. این جوری محاسبات راحت‌تر می‌شود.

خودت حل کنی بهتره اگر سه جمله متوالی از دنباله هندسی را داشته باشیم، مربع جمله وسط برابر است با حاصل ضرب جمله قبل و بعد از آن.

پاسخ تشریحی **گام اول:** جمله وسط دنباله حسابی ۵ است؛ پس جمله قبلی و بعدی آن را به ترتیب $5-d$ و $5+d$ می‌گیریم:

$$5-d, 5, 5+d$$

$$6-d, 6, 14+d$$

گام دوم: سه جمله را به ترتیب با ۱، ۱ و ۹ جمع می‌کنیم:

گام سوم: سه عدد بالا، سه جمله متوالی دنباله هندسی‌اند؛ پس:

$$(5-d)(5+d) = 6^2 \Rightarrow 25 - d^2 = 36 \Rightarrow d^2 = 25 - 36 = -11 \Rightarrow d = \pm \sqrt{-11}$$

$$\Rightarrow (d+11)(d-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} d = -11 \\ d = 4 \end{cases}$$

گام چهارم: به ازای هر دو مقدار d جملات دنباله هندسی را می‌نویسیم:

$$\bullet \quad 6-d, 6, 14+d \xrightarrow{d=-11} 17, 6, 3 \Rightarrow q = \frac{1}{3} \text{ یا } 3$$

$$\bullet \quad 6-d, 6, 14+d \xrightarrow{d=4} 2, 6, 18 \Rightarrow q = \frac{1}{3} \text{ یا } 3$$

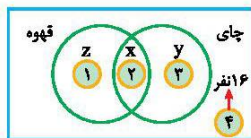
چون جملات مثبت‌اند؛ پس باید $q = 3$ را انتخاب کنیم تا دنباله صعودی باشد.

تست و پاسخ 13

در یک مهمانی که ۱۰۰ نفر حضور دارند، دو نوع نوشیدنی چای و قهوه برای مهمانان در دسترس است. تعداد افرادی که فقط یک نوع نوشیدنی برداشته‌اند، دو برابر تعداد افرادی است که دو نوع نوشیدنی را انتخاب کرده‌اند. اگر ۱۶ نفر هیچ کدام را برداشته باشند، حداقل چند نفر چای برداشته‌اند؟

- (۱) ۲۸ (۲) ۲۶ (۳) ۴۴ (۴) ۵۶

پاسخ: گزینه ۱



$$y + z = 2x$$

$$x + \underbrace{y + z}_{2x} + 16 = 3x + 16$$

$$3x + 16 = 100 \Rightarrow 3x = 84 \Rightarrow x = 28$$

$$x + y = 28 + y$$

در مورد y چیزی نمی‌دانیم، فقط می‌دانیم $y + z = 2x$ است؛ پس حداقل مقدار y برابر صفر و در نتیجه حداقل مقدار $28 + y$ برابر ۲۸ است.

پاسخ تشریحی **گام اول:** نمودار ون مناسب می‌کشیم:

گام دوم:

• مجموع قسمت (۱) و (۳)، دو برابر قسمت (۲) است:

• پس تعداد کل حاضرین در مهمانی برابر است با:

• از طرفی تعداد کل حاضرین در مهمانی ۱۰۰ است، پس:

گام سوم: تعداد آن‌هایی که چای برداشته‌اند می‌شود:

تست و پاسخ 14

جمله‌های سوم و ششم یک الگوی خطی، به ترتیب جمله‌های دوم و سوم یک دنباله هندسی‌اند. اگر جمله دوم الگوی خطی صفر باشد.

قدرنسبت دنباله هندسی کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) $\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره از جمله دوم صفر است، شروع کنید و a_1 را برحسب d بنویسید. بعد بروید سراغ جمله اول سؤال.

پاسخ تشریحی گام اول، جمله دوم الگوی خطی (دنباله حسابی) صفر است، پس:

$$a_2 = 0 \Rightarrow a_1 + d = 0 \Rightarrow a_1 = -d$$

گام دوم، جملات سوم و ششم الگوی خطی را برحسب d می‌نویسیم:

$$a_3 = a_1 + 2d = d \quad a_6 = a_1 + 5d = 4d$$

گام سوم: پس جملات دوم و سوم یک دنباله هندسی به ترتیب d و $4d$ هستند. نسبت آن‌ها، قدرنسبت دنباله هندسی را می‌دهد:

$$r = \frac{a_3}{a_2} = \frac{4d}{d} = 4$$

تست و پاسخ 15

مجموعه $\{m^2 - n \mid m, n \in \mathbb{Z}, |m| + |n| = 2\}$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۸ (۲) ۶ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره تمام حالت‌هایی که مجموع قدرمطلق دو عدد صحیح ۲ می‌شود را بنویسید. بعد به ازای آن‌ها حاصل $m^2 - n$ را حساب کنید. ببینید چند مقدار متفاوت داریم.

n	m	$m^2 - n$
۲	۰	-۲
-۲	۰	۲
۰	۲	۴
۰	-۲	۴
۱	۱	۰
۱	-۱	۰
-۱	۱	۲
-۱	-۱	۲

پاسخ تشریحی گام اول، m و n اعداد صحیح و $|m| + |n| = 2$ ، پس دو حالت کلی داریم:

(۱) $|m|$ و $|n|$ یکی ۲ و دیگری صفر است که خودش ۴ حالت دارد.

(۲) $|m|$ و $|n|$ هر دو ۱ هستند که ۴ حالت دارد.

گام دوم: هر ۸ حالت را در جدول می‌نویسیم و مقدار $m^2 - n$ را در آن‌ها حساب می‌کنیم:

در اعداد ستون سوم، ۴ مقدار متفاوت می‌بینیم: $\{-2, 2, 4, 0\}$

پس مجموعه داده شده ۴ عضو دارد.

آزمون‌های سراسر
گاج

1 6

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= (-1, 2] \\ A_2 &= (-\frac{1}{2}, 2] \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_1 \cup A_2 = (-1, 2]$$

$$A_3 = (-\frac{1}{2}, 4]$$

$$\Rightarrow (A_1 \cup A_2) - A_3 = (-1, 2] - (-\frac{1}{2}, 4] = (-1, -\frac{1}{2}]$$

شامل هیچ عدد صحیحی نیست.

1 7

$$\begin{aligned} & (B \cap C) \cup (A - B) \cup (B - C) \\ &= ((B \cap C) \cup (B \cap C')) \cup (A \cap B') \\ &= (B \cap (C \cup C')) \cup (A \cap B') \\ &= B \cup (A \cap B') = (B \cup A) \cap (B \cup B') = B \cup A \end{aligned}$$

8 1 اجتماع دو بازه $(a - 2b, 9)$ و $(7, 2a + 1)$ برابر $[7, 16]$ شده است.

پس حتماً $2a + 1$ برابر 16 می‌باشد و داریم:

$$2a + 1 = 16 \Rightarrow 2a = 15 \Rightarrow a = \frac{15}{2}$$

از طرفی چون ابتدای بازه اجتماع عدد 7 بوده، نتیجه می‌گیریم که $7 \leq a - 2b$ و چون انتهای بازه همیشه بزرگ‌تر از ابتدای بازه است، پس $a - 2b < 9$ و داریم:

$$7 \leq a - 2b < 9 \xrightarrow{a = \frac{15}{2}} 7 \leq \frac{15}{2} - 2b < 9 \Rightarrow 2 \leq -2b < 4$$

$$\Rightarrow -2 < b \leq -1 \xrightarrow{b \in \mathbb{Z}} b = -1$$

پس $b - a = -1 - \frac{15}{2} = -\frac{17}{2}$ می‌شود.

9 3

با توجه به این‌که این دو بازه فقط در یک نقطه مشترک هستند، بایستی انتهای بازه سمت چپ دقیقاً برابر ابتدای بازه سمت راست شود. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{array}{c} 2x + y \\ \hline 3x + y + 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x + y + 1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x + y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\times(-1)} \begin{cases} -2x - y = -4 \\ 3x + y = 3 \end{cases} \\ & \xrightarrow{+} \begin{cases} -2x - y = -4 \\ 3x + y = 3 \end{cases} \\ & \xrightarrow{x = -1} 3(-1) + y = 3 \Rightarrow y = 6 \end{aligned}$$

$$y^x = 6^{-1} = \frac{1}{6}$$

10 1

$$A \cap (A' \cup B) = (A \cap A') \cup (A \cap B) = \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B$$

11 1

بیماری دیابت بیماری قلبی

$$\begin{aligned} & n(A) = 15, n(B) = 20, n(A \cap B) = 5 \\ & n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ & \Rightarrow n(A \cup B) = 15 + 20 - 5 = 30 \end{aligned}$$

1 3

$$A = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$$

$$B = \{(0, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 2)\}$$

$$A \cup B = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (0, 0), (1, 1)\}$$

$$n(A \cup B) = 5$$

2 2

مجموعه B را تشکیل می‌دهیم:

$$(1 - 2x) \in A \Rightarrow 1 \leq 1 - 2x < 2 \xrightarrow{-1} 0 \leq -2x < 1$$

$$\xrightarrow{+(-2)} -\frac{1}{2} < x \leq 0 \Rightarrow B = (-\frac{1}{2}, 0]$$

$$A \cup B \cup C = (-\frac{1}{2}, 0] \cup (0, 1) \cup [1, 2) = (-\frac{1}{2}, 2) \Rightarrow b - a = \frac{5}{2}$$

3 2

جملات اول، سوم و چهارم را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} t_1 = \frac{x}{y} \\ \xrightarrow{+} t^2 = \frac{x+1}{y} = \frac{2x+2}{x} \\ t_2 = t_1 t^2 = x+1 \\ \xrightarrow{+} t = \frac{x-5}{x+1} \\ t_3 = t_1 t^3 = x-5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x-5}{x+1}\right)^2 = \frac{2x+2}{x} \Rightarrow x(x^2 - 10x + 25) = 2(x+1)^2$$

$$\Rightarrow x^3 - 10x^2 + 25x = 2x^2 + 4x + 2 \Rightarrow x^3 - 12x^2 + 21x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x^3 + 16x^2 - 19x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x^2 + 17x - 2) = 0 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x = 1 \Rightarrow r = -2$$

$$\frac{1}{y}, -1, 2, -4, 8 \Rightarrow y = -1, z = 8 \Rightarrow xyz = -8$$

4 3

الگوی مورد نظر یک دایره بیشتر از الگوی مثلثی و رنگ‌نشده‌ها یک واحد کم‌تر از الگوی مثلثی است. می‌دانیم که الگوی

$$\text{مثلثی } \frac{n(n+1)}{2} \text{ است.}$$

$$t_n + b_n = \left(\frac{n(n+1)}{2} + 1\right) + \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right)$$

$$\Rightarrow t_n + b_n = n(n+1)$$

$$\Rightarrow t_{10} + b_{10} = 10 \times 11 = 110$$

5 3

هر سه مجموعه داده‌شده نامتناهی هستند. با علم به این موضوع گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

بررسی گزینه‌ها:

1) $C - A$ مجموعه‌ای شامل مضارب 5 است که مضارب 12 از آن برداشته شده است؛ چون 12 شمارنده 5 نیست و نسبت به آن اول است، در واقع فقط مضارب 60 از مجموعه C حذف می‌شود، پس این گزینه همچنان نامتناهی است.

2) $B - A$ مجموعه‌ای شامل مضارب 4 است که مضارب 12 از آن برداشته شده است؛ پس این مجموعه نیز نامتناهی است.

3) $A - B$ شامل مضارب 12 است که مضارب 4 از آن برداشته شده است؛ می‌دانیم تمام اعداد مضارب 12 مضارب 4 هم هستند؛ پس این مجموعه، مجموعه تهی و لذا متناهی است.

4) $A - C$ مجموعه‌ای از مضارب 12 است که مضارب 5 از آن برداشته می‌شود. چون 5 شمارنده 12 نیست در واقع فقط مضارب 60 از مجموعه A

12 ۴ جدول زیر را در نظر بگیرید.

شماره شکل	۱	۲	۳	...	n
دایره‌های توپر	۱	۴	۹	...	n^2
دایره‌های توخالی	۰	$2(1)$	$2(1+2)$...	$2(1+2+\dots+n-1)$

پس در شکل نهم داریم:

$$\begin{cases} 9^2 = 81 = \text{تعداد دایره‌های توپر} \\ 2 \times \frac{8(1+8)}{2} = 72 = \text{تعداد دایره‌های توخالی} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{اختلاف} = 81 - 72 = 9$$

13 ۲ طبق خاصیت دنباله حسابی برای سه جمله متوالی داریم:

$$\begin{aligned} 2(3x) &= (2x+1) + (5x-5) \Rightarrow 6x = 7x-4 \Rightarrow x=4 \\ \Rightarrow t_4 &= 2(4)+1=9, t_5=2(4)+5=13 \Rightarrow d=13-9=4 \\ t_{11} &= t_5 + (21-5)d \Rightarrow t_{11}=13+16(4)=69 \end{aligned}$$

14 ۱ فرض کنید این سه عدد a , b و c و قدرنسبت r باشد، داریم:

$$\frac{a \times b \times c}{b^2} = \frac{512}{b^2} \Rightarrow b^3 = 512 \Rightarrow b^3 = 8^3 \Rightarrow b=8$$

می‌دانیم $a = \frac{b}{r}$ و $c = br$ ، پس داریم:

$$\begin{aligned} a+b+c &= 28 \Rightarrow \frac{b}{r} + b + br = 28 \xrightarrow{b=8} \frac{8}{r} + 8 + 8r = 28 \\ \Rightarrow \frac{8}{r} + 8r &= 20 \xrightarrow{\times r} 8 + 8r^2 = 20r \Rightarrow 8r^2 - 20r + 8 = 0 \\ \xrightarrow{+4} &2r^2 - 5r + 2 = 0 \end{aligned}$$

با امتحان کردن گزینه‌ها $r=2$ به دست می‌آید.

15 ۴

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 r^{n-1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{729} = 1 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ \frac{1}{729} = 3^6 \end{cases} \\ a_1 &= 1, r = -\frac{1}{3} \\ \Rightarrow \frac{1}{3^6} &= \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{(-3)^{n-1}} \\ \Rightarrow 3^6 &= (-3)^{n-1} \Rightarrow 6 = n-1 \Rightarrow n=7 \end{aligned}$$

16 ۳

$$\begin{aligned} t_4 - t_5 &= 20 \Rightarrow 2d = 20 \Rightarrow d=10 \\ A &= \frac{t_1 + 4d + t_1 + 2d - 2t_1 + 1}{t_1 + 3d + t_1 + 9d - 2(t_1 + 4d) - 20} = \frac{6d+1}{4d-20} \\ &= \frac{6 \times 10 + 1}{4 \times 10 - 20} = \frac{61}{20} = 3 \frac{1}{20} \end{aligned}$$

17 ۲ می‌دانیم جمله عمومی الگوهای خطی به صورت $t_n = bn + h$

است که در آن b و h مقادیر ثابت می‌باشند بنابراین در الگوی t_n ضریب n^2 باید برابر صفر باشد، پس داریم:

$$-2k + 4 = 0 \Rightarrow k=2$$

بنابراین جمله عمومی دنباله a_n به صورت زیر خواهد بود:

$$a_n = (-1)^{n+1} \frac{2n}{n+1}$$

۸ جمله اول این دنباله به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, a_2 = -\frac{2}{3}, a_3 = \frac{2}{4}, a_4 = -\frac{2}{5}, a_5 = \frac{2}{6} \\ a_6 &= -\frac{2}{7}, a_7 = \frac{2}{8}, a_8 = -\frac{2}{9} \\ \Rightarrow a_1 \times a_2 \times \dots \times a_8 &= 1 \times \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{4}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(\frac{2}{6}\right) \times \left(-\frac{2}{7}\right) \times \left(\frac{2}{8}\right) \times \left(-\frac{2}{9}\right) \\ &= \frac{2^8}{9} = \frac{256}{9} \end{aligned}$$

18 ۲ ابتدا جمله عمومی دنباله را پیدا می‌کنیم، سپس آن را

بزرگ‌تر از صفر قرار می‌دهیم تا تعداد جملات مثبت به دست آید:

$$\begin{aligned} t_{48} - t_{24} &= (48-24)d \Rightarrow -2 = 24d \Rightarrow d = -\frac{1}{12} \\ t_n &= t_1 + (n-1)d = 2 + (n-1)\left(-\frac{1}{12}\right) > 0 \\ \Rightarrow \frac{n-1}{12} &< 2 \Rightarrow n-1 < 24 \Rightarrow n < 25 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n \leq 24 \end{aligned}$$

یعنی ۲۴ جمله این دنباله، مثبت است.

19 ۳ به کمک رابطه $d = \frac{b-a}{m+1}$ داریم:

$$\begin{aligned} d &= \frac{150-130}{4+1} = 4 \Rightarrow \text{جملات} = 130, 134, 138, 142, 146, 150 \\ \text{مجموع دومین و چهارمین جمله برابر است با:} \\ 134 + 142 &= 276 \end{aligned}$$

20 ۱ دنباله را به صورت $3, 1, x, 27, y, \dots$ در نظر می‌گیریم.

دنباله تفاضلات باید دنباله حسابی باشد.

$$\begin{aligned} \text{دنباله تفاضلات: } 4, x-1, 27-x, y-27, \dots \\ 2(x-1) &= 4+27-x \Rightarrow x=11 \\ \Rightarrow \text{دنباله تفاضلات: } 4, 10, 16, y-27, \dots \\ y-27 &= 16+6=22 \Rightarrow y=49 \end{aligned}$$

مجموع جملات سوم و پنجم $x+y$ یعنی برابر ۶۰ است.

21 ۲ چون A و B دو مجموعه جدا از هم هستند، پس $n(A \cap B) = 0$ و در نتیجه $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ است. از طرفی $n(A)$ و $n(B)$ اعداد حسابی هستند و فقط حالت‌های زیر رخ می‌دهد.

$$\begin{aligned} n(B) &= 8 - 3n(A) \\ 1) n(A) &= 0 \Rightarrow n(B) = 8 \Rightarrow n(A \cup B) = 8 \\ 2) n(A) &= 1 \Rightarrow n(B) = 5 \Rightarrow n(A \cup B) = 6 \\ 3) n(A) &= 2 \Rightarrow n(B) = 2 \Rightarrow n(A \cup B) = 4 \end{aligned}$$

22 ۳

$$2y - x = y - \frac{2}{x} \xrightarrow{\times x} 2xy - x^2 = xy - 2 \Rightarrow xy - x^2 = -2$$

23 ۴ دنباله مربعی $t_n = n^2$ است.

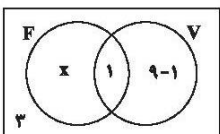
$$t_n = n^2 \Rightarrow t_4 = 16, t_5 = 25$$

اگر دنباله حسابی را a_n در نظر بگیریم.

$$\begin{cases} a_3 = t_4 = 16 \\ a_4 = t_5 = 25 \end{cases} \Rightarrow d = \frac{16-4}{4-3} = \frac{12}{1} = 12$$

24 ۳

$$\begin{aligned} a_n < 0 &\Rightarrow 3n^2 - 5n - 50 < 0 \Rightarrow (n-5)(3n+10) < 0 \\ \Rightarrow \frac{-10}{3} &< n < 5 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n \in \{1, 2, 3, 4\} \end{aligned}$$



تعداد اعضای هر رشته را درون مجموعه آن نوشته‌ایم.

$$3 + x + 1 + 8 = 22 \Rightarrow x = 10$$

بنابراین ۱۱ نفر به فوتبال علاقه دارند.

$$\{p\} = (-\infty, k+2] \cap [\frac{15}{k}, 10) \Rightarrow k+2 = \frac{15}{k} = p \quad \text{۲ ۳۲}$$

$$\Rightarrow k+2 = \frac{15}{k} \Rightarrow k^2 + 2k - 15 = 0 \Rightarrow (k+5)(k-3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k=3 \Rightarrow p=5 \\ k=-5 \Rightarrow p=-3 \end{cases} \Rightarrow |p+k| = 8$$

$$d = \frac{a_5 - a_7}{5 - 7} = \frac{21 - 6}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

$$a_7 = 6 \Rightarrow a_1 + d = 6 \Rightarrow a_1 = 1$$

$$\frac{a_{10} + a_{11}}{a_7 + a_8 + a_9} = \frac{a_1 + 9d + a_1 + 10d}{a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d}$$

$$= \frac{2a_1 + 19d}{3a_1 + 6d} = \frac{2 + 19 \cdot 5}{3 + 30} = \frac{97}{33}$$

۲ ۳۱

۱ ۲۵ دنباله را به صورت $3, 1, x, 27, y, \dots$ در نظر می‌گیریم. دنباله تفاضلات باید دنباله حسابی باشد.

دنباله تفاضلات: $4, x-1, 27-x, y-27, \dots$

$$2(x-1) = 4 + 27 - x \Rightarrow x = 11$$

\Rightarrow دنباله تفاضلات: $4, 10, 16, y-27, \dots$

$$y - 27 = 16 + 6 = 22 \Rightarrow y = 49$$

مجموع جملات سوم و پنجم $x+y$ یعنی برابر ۶۰ است.

۲ ۲۶ چون A و B دو مجموعه جدا از هم هستند. پس

$n(A \cap B) = 0$ و در نتیجه $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ است. از طرفی

$n(A)$ و $n(B)$ اعداد حسابی هستند و فقط حالت‌های زیر رخ می‌دهد.

$$n(B) = 8 - 3n(A)$$

$$1) n(A) = 0 \Rightarrow n(B) = 8 \Rightarrow n(A \cup B) = 8$$

$$2) n(A) = 1 \Rightarrow n(B) = 5 \Rightarrow n(A \cup B) = 6$$

$$3) n(A) = 2 \Rightarrow n(B) = 2 \Rightarrow n(A \cup B) = 4$$

۳ ۲۷

$$2y - x = y - \frac{3}{x} - \frac{xx}{x} \Rightarrow 2xy - x^2 = xy - 3 \Rightarrow xy - x^2 = -3$$

دنباله مربعی $t_n = n^2$ است.

$$t_n = n^2 \Rightarrow t_7 = 49, t_8 = 64$$

اگر دنباله حسابی را a_n در نظر بگیریم.

$$\begin{cases} a_7 = t_7 = 49 \\ a_8 = t_8 = 64 \end{cases} \Rightarrow d = \frac{64 - 49}{8 - 7} = \frac{15}{1} = 15$$

۳ ۲۹

$$a_n < 0 \Rightarrow 2n^2 - 5n - 50 < 0 \Rightarrow (n-5)(2n+10) < 0$$

$$\Rightarrow \frac{-10}{2} < n < 5 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n \in \{1, 2, 3, 4\}$$

۲ ۳۰ دنباله درجه دوم را $a_n = an^2 + bn + c$ فرض می‌کنیم.

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_7 = 0 \\ a_8 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = -2 \\ 49a + 7b + c = 0 \\ 64a + 8b + c = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8a + 2b = 2 \\ 16a + 2b = 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 8a = 8 \Rightarrow a = 1, b = -3, c = 0 \Rightarrow a_n = n^2 - 3n$$

دنباله خطی را $t_n = An + B$ فرض می‌کنیم.

$$t_1 = -1, t_5 = 7 \Rightarrow A = \frac{7+1}{5-1} = 2, B = -3$$

$$\Rightarrow t_n = 2n - 3$$

جمله نودم دنباله خواسته شده a_{90} و جمله صد و یکم آن t_{91} است.

$$a_{90} = 45^2 - 3 \times 45 = 45 \times 42 = 1890$$

$$t_{91} = 2(91) - 3 = 182 - 3 = 179$$

$$a_{90} + t_{91} = 1890 + 179 = 1969$$